Nome: _______________________________________	**Número:** _________

ELECTROMAGNETISMO

Lic. Eng. Eletrotécnica – Sistemas Elétricos de Energia

Prova de exame de época Normal: 2022-02-10

Ano Letivo 2021/22, 2.º semestre, duração: 90 min.

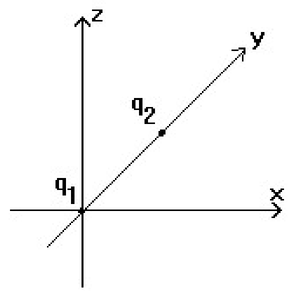
A prova termina com a palavra **fim** escrita em letras maiúsculas.

Todas as deduções devem ser apresentadas.

GRUPO I (4 valores):

Tal como ilustrado na figura ao lado, considere duas partículas $\mathbf{q_1}$ e $\mathbf{q_2}$ carregadas com **20 μC** e **-5 μC**, respetivamente. O meio é homogéneo e isotrópico. A partícula $\mathbf{q_1}$ encontra-se na origem do referencial e dista de **50 cm** de $\mathbf{q_2}$ situada no eixo **y**. O campo elétrico resultante será nulo no infinito e possivelmente algures ao longo do eixo **y**.

Encontre o ou os pontos de coordenada finita para os quais o campo elétrico resultante da ação das duas cargas é nulo.



Dados:

$q1 = 20uC \quad q2 = \text{-}5uC \quad p1 = (0, 0, 0)\ p2 = (0, 0.5, 0)\ m \quad \vec{E} = \frac{q}{4\varepsilon\pi r^2}\vec{a}_r$

Resolução:

O campo, por as cargas serem de sinal contrário, anula-se fora do segmento entre as cargas.

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \qquad => \qquad \frac{20\times10^{-6}}{4\varepsilon\pi|Y|^2}\frac{(0,Y,0)-(0,0,0)}{|(0,Y,0)-(0,0,0)|} + \frac{-5\times10^{-6}}{4\varepsilon\pi|Y-p2_y|^2}\frac{(0,Y,0)-(0,0.5,0)}{|(0,Y,0)-(0,0.5,0)|} = 0$$

Nas presentes condições os vetores diretores dos dois campos são unitários segundo y positivo.

$$\frac{20}{4\varepsilon\pi|Y|^2} + \frac{-5}{4\varepsilon\pi|Y-0.5|^2} = 0 \quad => \quad \frac{20}{4\varepsilon\pi|Y|^2} = -\frac{-5}{4\varepsilon\pi|Y-0.5|^2} => \quad \frac{20}{|Y|^2} = -\frac{-5}{|Y-0.5|^2} \quad =>$$

$$20|Y-0.5|^2 - 5|Y|^2 = 0 \quad => \quad (20-5)Y^2 - 20\times2Y\times0.5 + 20\times0.5^2 = 0 \quad =>$$

$$15Y^2 - 20Y + 5 = 0 \quad => \quad \mathbf{Y = 1\ m} \ \vee\ \mathbf{Y = \frac{1}{3}\ m}$$

como Y não pode ser interior ao segmento que ume as cargas, então: $\mathbf{Y = 1\ m}$

Resposta:

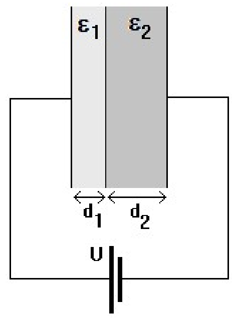
O campo elétrico, para coordenadas finitas, anula-se no eixo dos y em $\mathbf{Y = 1\ m}$.

Nome: ____	Número: __________

GRUPO II (4 valores):

Considere o condensador elétrico de placas paralelas com dois dielétricos distintos apresentado na figura ao lado. Cada uma das placas tem área **S** desconhecida. A relação entre as permissividades absolutas dos dielétricos é $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_2$. As espessuras dos dielétricos são iguais, $\mathbf{d_1 = d_2}$. A tensão elétrica, **U**, aos terminais do condensador é **150 V**.

Determine as tensões elétricas na totalidade da espessura de cada um dos dielétricos.



Dados:

$\varepsilon_1 = 3\varepsilon_2$ $\quad$ $d_1 = d_2$ $\quad$ $U = 150$ V $\quad$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

Resolução:

Sendo uma serie de capacidades o fluxo elétrico devido à polarização do condensador igual em ambos os dielétricos, logo:

$$S_1\vec{D}_1 = S_2\vec{D}_2$$

como as secções são iguais (S1=S2)

$\vec{D}_1 = \vec{D}_2$ logo $\varepsilon_1\vec{E}_1 = \varepsilon_2\vec{E}_2$ => $\varepsilon_1 U_1/d_1 = \varepsilon_2 U_2/d_2$ de acordo com os dados:

$$3\varepsilon_2 U_1/d_2 = \varepsilon_2 U_2/d_2 \Rightarrow \quad 3U_1 = U_2$$

como $U = U_1 + U_2$ tem-se: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4}U \\ U_2 = \frac{3}{4}U \end{cases}$ para a tensão dada, $\begin{cases} \mathbf{U_1} = \mathbf{37.5\ V} \\ \mathbf{U_2} = \mathbf{112.5\ V} \end{cases}$

Resposta:

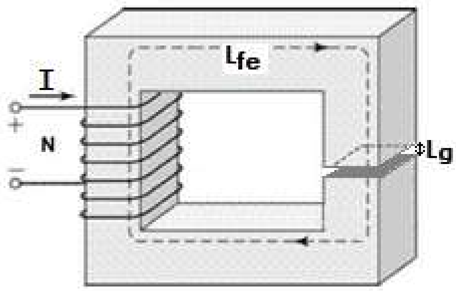
A tensão elétrica na totalidade da espessura dos dielétricos 1 e 2 é, respetivamente, 37.5V e 112.5V.

Nome: ______________________________	Número: _________

GRUPO III (4 valores):

Considere o circuito magnético linear apresentado na figura ao lado. A secção do circuito magnético é constante e tem o valor de **5 cm²**. A indutância vista aos terminais do enrolamento de **1500** espiras é de **200 mH**. A espessura do entreferro e o comprimento da parte ferromagnética são desconhecidos.

Determine a força de atração observada entre as faces do entreferro quando a corrente que circula no enrolamento é de **15 A**.



Dados:

S = 5 cm² $\quad F = \frac{1}{2} \times \frac{B^2}{\mu} S \quad$ N = 1500 $\quad$ L = 200 mH $\quad L = \frac{N\emptyset}{I} \quad \emptyset = BS$

Resolução:

$L = \frac{N\emptyset}{I}$ => $L = \frac{NBS}{I}$ => $\boldsymbol{B = \frac{L \times I}{N \times S}}$ como $F = \frac{1}{2} \times \frac{B^2}{\mu} S$ tem-se:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{L \times I}{N \times S}\right)^2}{\mu} \boldsymbol{S} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \times \frac{(L \times I)^2}{\mu N^2 S}$$

para os dados do problema,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(200 \times 10^{-3} \times 15\right)^2}{1.2566 \times 10^{-6} \times 1500^2 \times 5 \times 10^{-4}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F = 3.183\ kN}$$

Resposta:

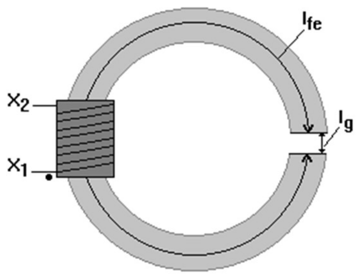
A força de atração entre as faces do entreferro é de 3.183 kN.

GRUPO IV (4 valores):

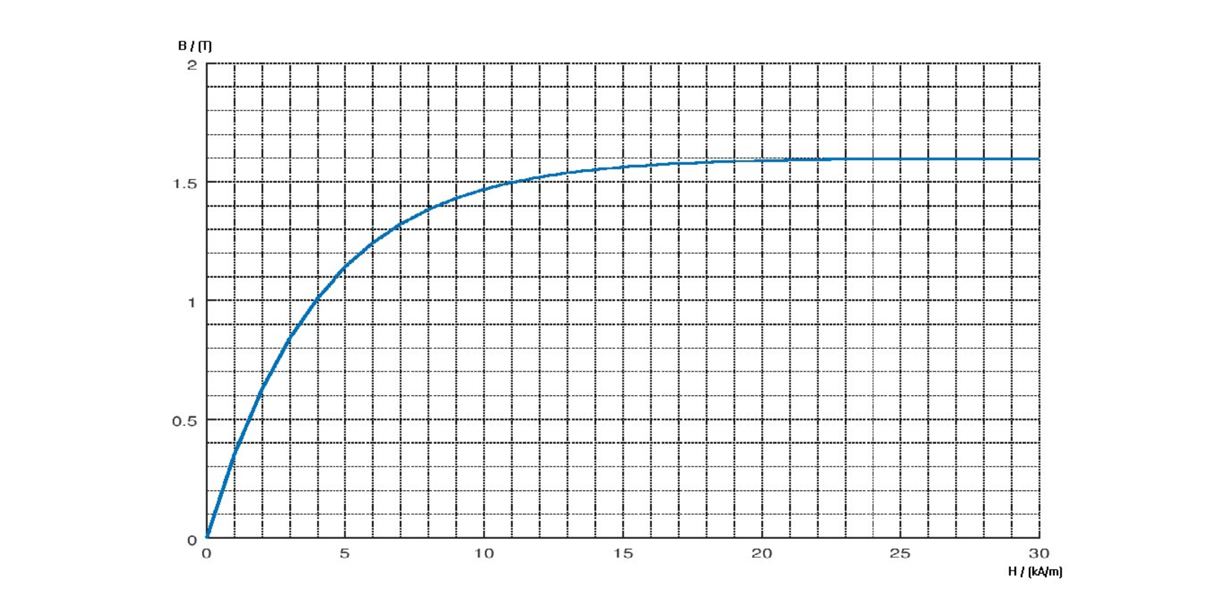
Considere o circuito magnético não linear apresentado na figura ao lado. O núcleo tem secção constante de **S=4 cm²**. A parte ferromagnética tem comprimento **L_{med}=10 cm**. O entreferro é de ar e tem **l_g=2 mm** de comprimento. O enrolamento de **N=250** espiras, perfeitamente ajustadas ao núcleo, é percorrido por uma corrente de **I=10** A. A curva de magnetização do material constituinte da parte ferromagnética é a apresentada na figura seguinte.

Determine:

1) o campo magnético no entreferro e
2) a indutância aos terminais do enrolamento.



Nome: ____	Número: __________



Dados:

$S = 4\ cm^2$ $L_{med} = 10\ cm$ $l_g = 2\ mm$ $N = 250$ $I = 10\ A$

$NI = \Re\emptyset$ $\Re = \frac{l}{\mu A}$

Resolução:

$NI = \Re\emptyset \quad => \quad NI = (\Re_f + \Re_g)BS \quad => \quad NI = \left(\frac{l_f}{\frac{B}{H_f}\times S} + \frac{l_g}{\mu_0 S}\right)BS =>$

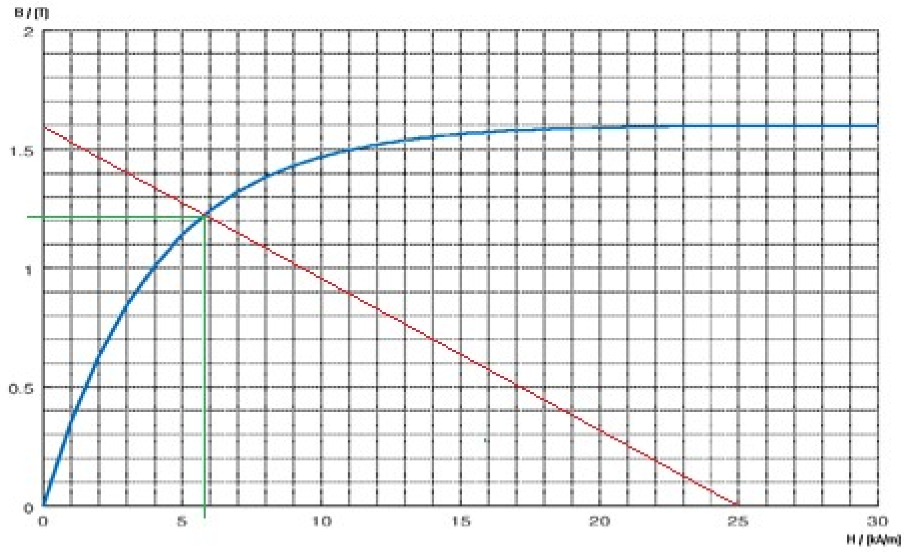
$NI = l_f \times H_f + \frac{l_g}{\mu_0} \times B$ para os dados:

$10\times250 = 0.1 \times H_f + \frac{2\times10^{-3}}{1.2566\times10^{-6}} \times B \quad => \quad 2500 = 0.1 \times H_f + 1592 \times B$

procurando pontos para traçado na curva de magnetização,

$$\begin{cases} H_f = 0 \quad ; \quad 1.57\ T \\ B\ = 0 \quad ; \quad H_f = 25000\ A/m \end{cases}$$

Nome: ____	Número: __________



da interceção:

$$\begin{cases} H_f = 5.85 \text{ kA/m} \\ B = 1.11 \text{ T} \end{cases} \quad \text{como} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \Rightarrow \quad H_0 = B/\mu_0 \quad \Rightarrow$$

$$H_0 = 1.11/1.2566 \times 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad H_0 = 883.33 \text{ kA/m}$$

$$L = \frac{N\emptyset}{I} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{NBS}{I} \quad \text{para dos dados,}$$

$$L = \frac{250 \times 1.11 \times 4 \times 10^{-4}}{10} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L = 11.1 \text{ mH}}$$

Resposta a):

O campo magnético no entreferro é $\mathbf{883.33 \text{ kA/m}}$.

Resposta b):

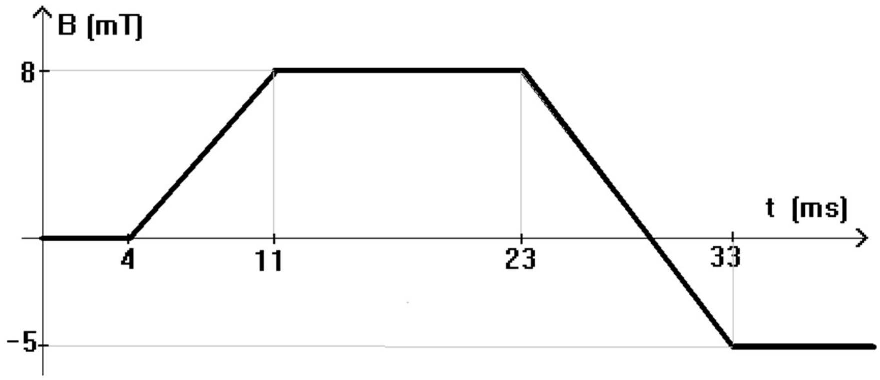
A indutância vista aos terminais do enrolamento é **11.1 mH**.

Nome: ___________________________________	Número: _________

GRUPO V (4 valores):

Considere um enrolamento com **150** espiras e secção de **20 cm²**. A densidade de fluxo magnético em função do tempo na perpendicular ao enrolamento é a indicada no gráfico presente na figura seguinte.

Determine o gráfico temporal de uma possível força eletromotriz induzida no enrolamento ao longo do tempo.



Dados:

N = 150 S = 20 cm2 $V = -N\frac{d\emptyset}{dt}$ $\emptyset = BS$

Resolução:

$V = -N\frac{d\emptyset}{dt}$ => $V = -N\frac{d\mathbf{BS}}{dt}$ => $V = -N\mathbf{S}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$

sendo B dado por segmentos de reta, tem-se: $V = -N\mathbf{S}\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t}$.

Entre 0 e 4 ms, entre 11 ms e 23 ms e a partir dos 33 ms a razão $\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t}$ é nula, logo a força eletromotriz induzida também é nula.

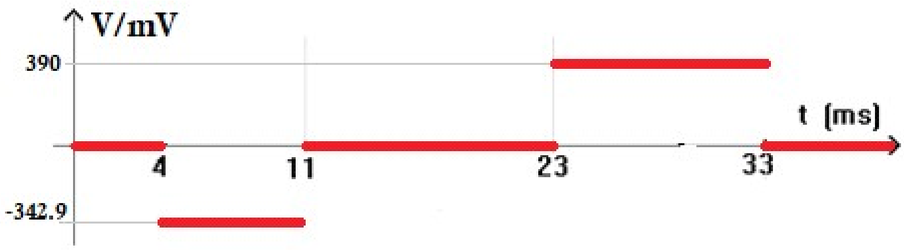
Entre os 4 e os 11 ms tem-se $\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} = 1.143\ T/s$ logo,

$V = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$ => V=$-150 \times 20 \times 10^{-4} 1.143$ => $\mathbf{V = -342.9\ mV}$

Entre os 23 e os 33 ms tem-se $\frac{\Delta B}{\Delta t} = -1.3\ \mathrm{T/s}$, logo

$V = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$ => V=$-150 \times 20 \times 10^{-4}(-1.3)$ => $\mathbf{V = 390\ mV}$

Respsota:



FIM

Nome: ____	**Número:** __________

Formulário:

$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$	$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{N}\emptyset}{\mathrm{I}}$	$\Re = \frac{\mathrm{l}}{\mu\mathrm{A}}$
$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$	$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon\vec{\mathrm{E}}$	$\vec{\mathrm{B}} = \mu\vec{\mathrm{H}}$
	$\mathrm{NI} = \Re\emptyset$	$\mathrm{V} = -\mathrm{N}\frac{\mathrm{d}\emptyset}{\mathrm{dt}}$
	$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{q}}{4\varepsilon\pi\mathrm{r}^2}\vec{\mathrm{a}}_\mathrm{r}$	$\mathrm{d}\vec{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{dQ}}{4\pi \in \mathrm{R}^2}\vec{\mathrm{a}}_\mathrm{r}$
$\mathrm{V} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_l \left(\overrightarrow{U\times\vec{B}}\right)\cdot d\vec{l}$	$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}}$	$\emptyset = \mathrm{BS}$
Permeabilidade magnética do vácuo $1{,}2566\times10^{-6}$ H/m	$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\mathrm{CV}^2$	$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\mathrm{LI}^2$
Permissividade elétrica do vácuo $8{,}854187\times10^{-12}$ F/m	$\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{Id}\vec{\mathrm{l}}}{4\pi\mathrm{R}^2}\times\vec{\mathrm{a}}_\mathrm{r}$	$\mathrm{M} = \mathrm{K}\sqrt{\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2}$
	$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{B}^2}{\mu}S$	$\Psi = \mathrm{DS}$