Nome: ____	Número: __________

ELECTROMAGNETISMO

Lic. Eng. Electrotécnica – Sistemas Eléctricos de Energia

Prova de Exame: 2021

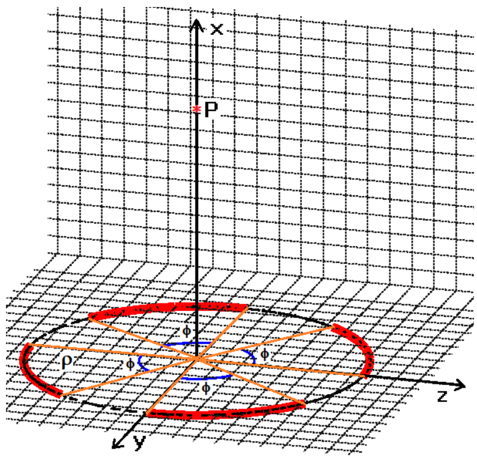
Ano Letivo 2020/21, 1.º semestre, duração: 01H15.

A prova termina com a palavra fim escrita em letras maiúsculas.

GRUPO I (4 valores), tempo de resolução limite de 15 minutos

Considere a figura ao lado na qual está representada a circunferência de raio $\rho =$ **20** mm com centro coincidente com a origem do referencial e contida no plano perpendicular ao eixo do **x**. Nesta circunferência considere quatro arcos **uniformemente** distribuídos e electrizados. Cada um dos arcos tem abertura $\phi = \pi / \mathbf{3}$ e densidade de carga linear δ = **2** $\mu\,\mathrm{C/m}$. O meio em que a espira se encontra é o vazio.

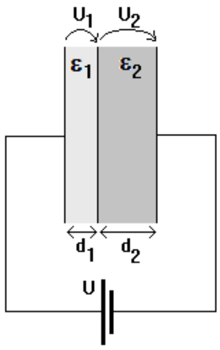
Determine o módulo do campo eléctrico no ponto **P** do eixo dos **x** para **X =** **50** **mm.**



GRUPO II (4 valores), tempo de resolução limite de 15 minutos

Considere o condensador eléctrico de placas paralelas com dois dieléctricos distintos, tal como apresentado na figura ao lado. Cada uma das placas tem área **S** desconhecida. A relação entre as permissividades absolutas dos dieléctricos é $\boldsymbol{\varepsilon_1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon_2}$. As espessuras dos dieléctricos são $\mathbf{d_1} = \mathbf{1}$ **mm** e $\mathbf{d_2} = \mathbf{2}$ **mm**. A tensão eléctrica nas extremidades do dieléctrico de espessura $\mathbf{d_1}$ é $\mathbf{U_1}$ = **50** **V**.

Determine a tensão no dieléctrico de espessura $\mathbf{d_2}$ condensador.



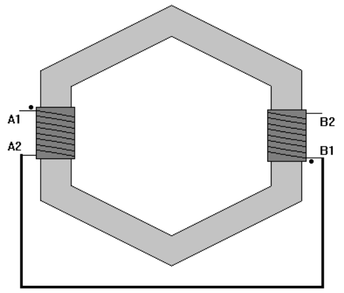
Nome: ____	Número: __________

GRUPO III (4 valores), tempo de resolução limite de 15 minutos

Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. O núcleo tem comprimento médio $\mathbf{L_{med}}$ **= 25 cm**, secção **S = 5 cm²** e permeabilidade magnética relativa μ_r = **200**. Um dos enrolamentos tem os pontos de ligação **A1** e **A2** e tem $\mathbf{N_A}$ = **250** espiras. O outro enrolamento tem os pontos de ligação **B1** e **B2** e tem $\mathbf{N_B}$ = **80** espiras. Cada um dos enrolamentos tem as espiras perfeitamente ajustadas ao núcleo. A densidade de fluxo magnético no núcleo é **0.75 T**, nas presentes condições de funcionamento.

Determine:

1) a corrente eléctrica nos enrolamentos e
2) a indutância vista aos terminais **A1** e **B2**.

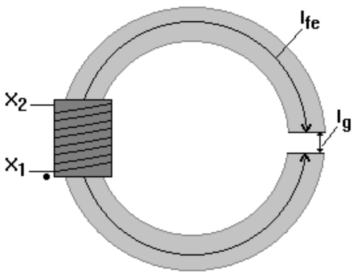


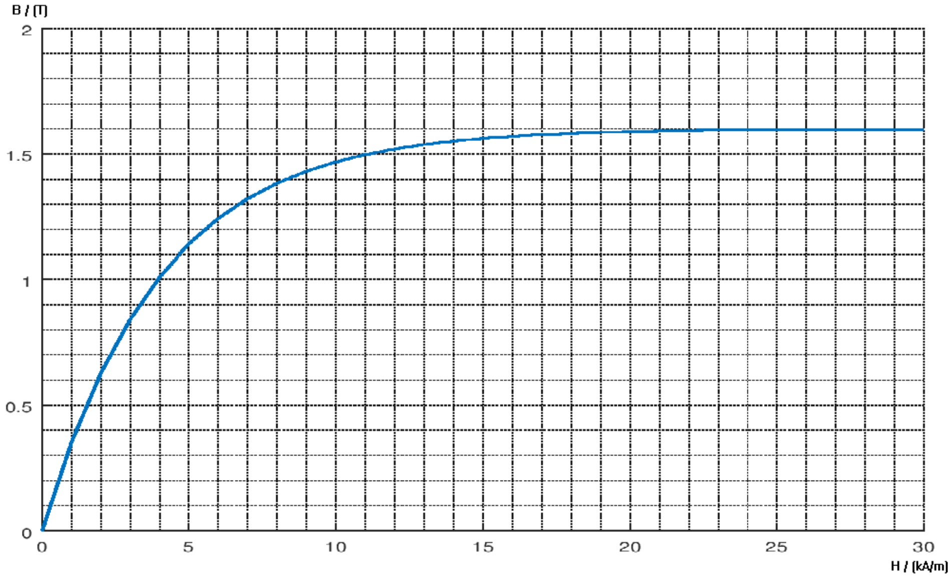
GRUPO IV (4 valores), tempo de resolução limite de 15 minutos

Considere o circuito magnético não linear apresentado na figura ao lado. O núcleo tem secção constante de **S=4 cm²**. A parte ferromagnética tem comprimento $\mathbf{L_{med}}$**=10 cm**. O entre-ferro é de ar e tem $\mathbf{l_g}$**=2 mm** de comprimento. O enrolamento de **N=250** espiras, perfeitamente ajustadas ao núcleo, é percorrido por uma corrente de **I=10** A. A curva de magnetização do material constituinte da parte ferromagnética é a apresentada na figura seguinte.

Determine:

1) o campo magnético no entre-ferro e
2) a indutância aos terminais do enrolamento.

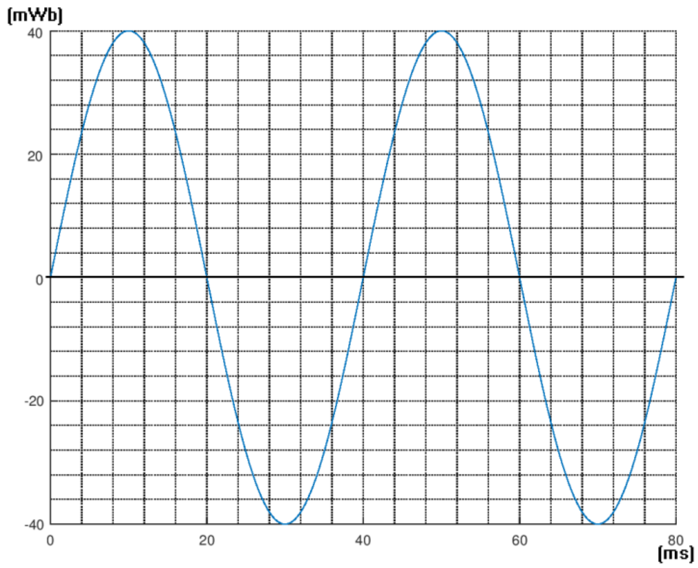




Nome: ____	Número: _________

GRUPO V (4 valores), tempo de resolução limite de 15 minutos

Considere um enrolamento com **N=120** espiras na presença de um fluxo magnético **sinusoidal** de período **40 ms** e valor de pico **40 mWb**, tal como ilustrado na figura seguinte.



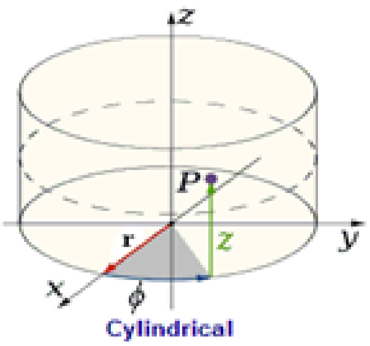
1) Determine a tensão absoluta aos terminais do enrolamento no instante de tempo **6** ms.
2) Sendo a secção do enrolamento de **500 cm^2** determine o módulo da densidade de fluxo magnético nesse mesmo instante.

FIM

Nome: ______________________________________	Número: __________

Formulário:

$div(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ $rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z$ $lap(A) = \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ $grad(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{a}_z$	$L = \frac{N\phi}{I}$ $NI = \Re\phi$	$\Re = \frac{l}{\mu A}$ $V = -N\frac{d\phi}{dt}$
Permeabilidade magnética do vácuo 1,2566×10^{-6} H/m (ou T·m/A)	$d\vec{E} = \frac{dQ}{4 \times \pi \times \varepsilon \times R^2}\vec{a}_r$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
Permissividade eléctrica do vácuo 8,854187×10^{-12} C^2/m/N	$dQ = \delta \times \rho \times d\phi$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$



$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$
$$dv = r\,dr\,d\phi\,dz$$
$$ds_{rz} = drdz$$
$$ds_{r\phi} = rdrd\phi$$
$$ds_{z\phi} = rdzd\phi$$
$$(r,\phi,z) \equiv r\vec{a}_r + \phi\vec{a}_\phi + z\vec{a}_z$$
$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_z$$

$$div(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{a}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\vec{a}_z$$
$$lap(A) = \nabla^2 A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$
$$grad(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \phi}\vec{a}_\phi + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{a}_z$$

Nome: ____	Número: _________

Resolução

Grupo I

$\rho = 20\,\text{mm}$ $\quad \phi = \pi/3$ $\quad \delta = 2\times\mu\text{C/m}$ $\quad X = 50\,\text{mm}$ $\quad d\vec{E} = \dfrac{dQ}{4\times\pi\times\varepsilon\times R^2}\vec{a}_r$

$dQ = \delta\times\rho\times d\phi$

Resolução:

$$\vec{a}_r = \frac{p_f - p_i}{\left|p_f - p_i\right|} \qquad R = \left|p_f - p_i\right|$$

Devido à simetria apenas existirá campo resultante segundo o eixo X, logo ignorando o cálculo das restantes componentes, tem-se:

$$\vec{a}_r = \vec{u}_x \frac{X}{R}$$

A distância entre o ponto de observação e o infinitesimal de carga será constante, então:

$$R = \sqrt{X^2 + \rho^2}$$

Logo para o diferencial de campo eléctrico segundo a componente x tem-se para um dos arcos e segundo a vertical:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\times\varepsilon\times R^2}\vec{a}_r \quad => \quad d\vec{E} = \frac{\delta\times\rho\times d\phi}{4\pi\times\varepsilon\times R^2}\vec{u}_x\frac{X}{R} \quad =>$$

$$d\vec{E} = \frac{X\times\delta\times\rho\times d\phi}{4\pi\times\varepsilon\times\left(X^2+\rho^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x$$

Como existem 4 arcos de abertura ϕ tem-se $d\vec{E}_T = 4d\vec{E}$, logo:

$$\vec{E}_T = 4\int_0^{\phi}\frac{X\times\delta\times\rho\times d\phi}{4\pi\times\varepsilon\times\left(X^2+\rho^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x \quad => \quad \vec{E}_T = \frac{X\times\delta\times\rho}{\pi\times\varepsilon\times\left(X^2+\rho^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x\int_0^{\phi}d\phi$$

$$\vec{E}_T = \frac{X\times\delta\times\rho\times\phi}{\pi\times\varepsilon\times\left(X^2+\rho^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x$$ para os dados presentes:

$$\vec{E}_T = \frac{50\times10^{-3}\times2\times10^{-6}\times20\times10^{-3}\times\dfrac{\pi}{3}}{\pi\times8{,}854187\times10^{-12}\times\left((50\times10^{-3})^2+(20\times10^{-3})^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x \quad => \quad \vec{E}_T \cong 482\,\vec{u}_x\ \ \text{kV/m}$$

Resposta: $\vec{E}_T \cong 482\,\vec{u}_x\ \ \text{kV/m}$

Nome: ____	Número: _________

Grupo II

$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ $\quad$ d_1 = 1 mm $\quad$ d_2 = 2 mm $\quad$ U_1 = 50 V

Nesta estrutura as placas são paralelas e iguais entre si, logo o fluxo eléctrico e consequentemente a densidade de fluxo eléctrico é a mesma nos dois dieléctricos, isto é:

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}$$

Como a relação entre densidade de fluxo eléctrico e campo eléctrico é: $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$ tem-se:

$$\vec{D} = \varepsilon_1\vec{E}_1 \qquad \vec{D} = \varepsilon_2\vec{E}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_1\vec{E}_1 = \varepsilon_2\vec{E}_2$$

Como por outro lado o campo eléctrico num condensador de placas é a razão entre a tensão entre as placas e a distância entre elas, tem-se:

$$E_1 = U_1/d_1 \qquad e \qquad E_2 = U_2/d_2$$

Logo:

$$\varepsilon_1\frac{U_1}{d_1} = \varepsilon_2\frac{U_2}{d_2} \qquad \Rightarrow \qquad U_2 = \frac{d_2\,\varepsilon_1}{d_1\,\varepsilon_2}U_1$$

para os dados presentes:

$$U_2 = \frac{2\times10^{-3}\times2\varepsilon_2}{1\times10^{-3}\,\varepsilon_2}50 \qquad \Rightarrow \qquad U_2 = \frac{2\times10^{-3}\times2}{1\times10^{-3}}50 \qquad \Rightarrow \qquad U_2 = 200\,\mathrm{V}$$

Resposta: $U_2 = 200\,\mathrm{V}$

GRUPO III

Dados:

L_{med} = 25 cm, $\quad$ S = 5 cm^2, $\quad$ μ_r = 200, $\quad$ N_A = 250, $\quad$ N_B = 80, $\quad$ B = 0.75 T

1)

$$NI = \Re\phi \qquad \Rightarrow \qquad (N_1+N_2)I = \frac{L_{med}}{\mu_0\mu_r S}\phi \qquad \Rightarrow \qquad (N_1+N_2)I = \frac{L_{med}}{\mu_0\mu_r S}BS \qquad \Rightarrow$$

$$I = \frac{L_{med}}{(N_1+N_2)\mu_0\mu_r}B$$

para os dados presentes:

$$I = \frac{25\times10^{-2}}{(250+80)\times1{,}2566\times10^{-6}\times200}0.75 \qquad \Rightarrow \qquad I \cong 2.26\,\mathrm{A}$$

Resposta: $I \cong 2.26\,\mathrm{A}$

2)

$$\begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{N\phi}{\mathrm{I}} \\ \mathrm{NI} = \Re\phi \\ \Re = \dfrac{L_{med}}{\mu \times S} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{N\phi}{\mathrm{I}} \\ \mathrm{NI} = \dfrac{L_{med}}{\mu \times S}\phi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \frac{N\phi}{\phi L_{med}} \mathrm{N} \times \mu \times S \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{L} = \frac{N^2}{L_{med}} \times \mu_0 \mu_r \times S$$ para os dados presentes:

$$\mathrm{L} = \frac{(250+80)^2}{25\times10^{-2}} \times 1{,}2566\times10^{-6} \times 200 \times 5 \times 1\theta^{-4} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} \cong 54.7\ \mathrm{mH}$$

Resposta:

$\mathrm{L} \cong 54.7\ \mathrm{mH}$

GRUPO IV

Dados:

S = 4 cm^2, L_{fe} = 10 cm, L_g = 2 mm, μ_{linear} = 0.5x10-3 T.m/A, N = 250, I = 10 A.

$$\mathrm{NI} = \Re\phi, \qquad \Re = \frac{l}{\mu \mathrm{A}}$$

Resolução:

1)

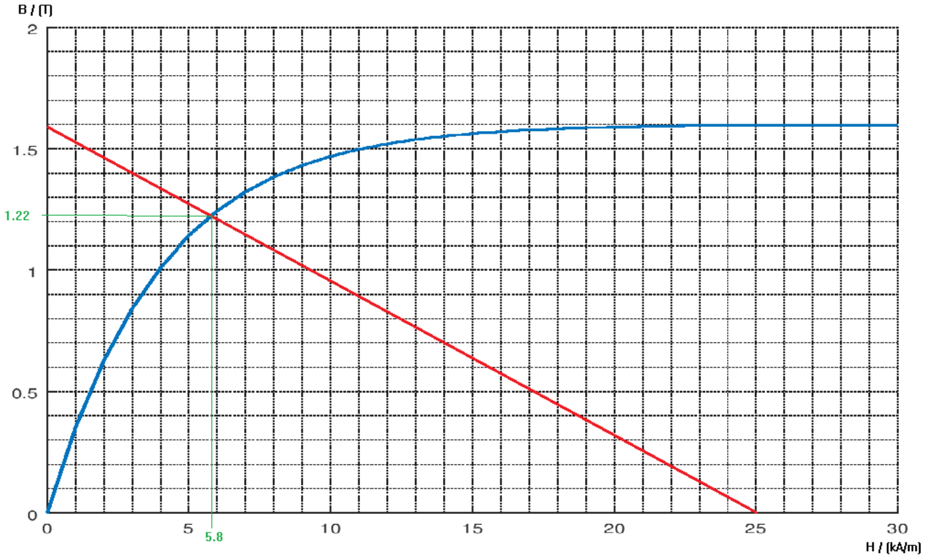
$$\mathrm{NI} = \Re\phi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NI} = (\Re_{fe} + \Re_g)\phi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NI} = \left(\frac{l_{fe}}{\mu_{fe} S} + \frac{l_g}{\mu_g S}\right) BS \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{NI} = \left(\frac{l_{fe}}{\mu_{fe}} + \frac{l_g}{\mu_g}\right) B \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NI} = \left(\frac{l_{fe}}{B / H_{fe}} + \frac{l_g}{\mu_g}\right) B \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NI} = l_{fe} H_{fe} + \frac{l_g}{\mu_g} B$$

$$\begin{cases} H_{fe} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{\mu_g}{l_g}\mathrm{NI} \\ B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{fe} = \dfrac{\mathrm{NI}}{l_{fe}} \end{cases}$$ para os dados presentes:

$$\begin{cases} H_{fe} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{1.2566\times10^{-6}}{2\times10^{-3}} 250\times10 \\ B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{fe} = \dfrac{250\times10}{10\times10^{-2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_{fe} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 1.57\ \mathrm{T} \\ B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{fe} = 25\ \mathrm{kA/m} \end{cases}$$

Nome: ____	Número: __________



Do gráfico, o ponto a densidade de fluxo no circuito é $B = 1{,}22\,\mathrm{T}$. Logo como $\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\,\vec{\mathrm{H}}_g$ tem-se:

$$\mathrm{H}_g = \frac{1{,}22}{1.2566\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_g = 971\ \mathrm{kA/m}$$

Resposta:

$$\mathrm{H}_g = 971\ \mathrm{kA/m}$$

2)

$\mathrm{L} = \dfrac{N\phi}{\mathrm{I}}$ => $\mathrm{L} = \dfrac{NBS}{\mathrm{I}}$ para os dados do problema e para a densidade de fluxo magnético encontrado na alínea anterior tem-se:

$$\mathrm{L} = \frac{250\times1.22\times4\times10^{-4}}{10} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} \cong 12.2\ \mathrm{mH}$$

GRUPO V

Dados:

S = 500 cm^2 $\quad \phi_{\max} = 40\,\mathrm{mWb}$ $\quad$ N=120 $\quad \mathrm{T} = 40\ \mathrm{ms}$ $\quad \mathrm{V} = -\mathrm{N}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}$ $\quad \phi = B\times S$

Resolução:

1)

$\phi = \phi_{\max}\sin\left(\dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}t\right)$ como $\mathrm{V} = -\mathrm{N}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}$

$$V = -N\frac{d\left(\phi_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)}{dt}$$ => $$V = -N\phi_{max}\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$ para os dados presentes:

$$V = -120\times 40\times 10^{-3}\frac{2\pi}{40\times 10^{-3}}\cos\left(\frac{2\pi}{40\times 10^{-3}}6\times 10^{-3}\right)$$ => $$V \cong -443\,V$$

como é pedido o valor absoluto: $|V| \cong 443\,V$

Resposta:

$|V| \cong 443\,V$

2)

$$\phi = B\times S$$

$B = \frac{\phi}{S}$ como da alínea anterior $\phi = \phi_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$$B = \frac{\phi_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{S}$$ para os dados presentes: $$B = \frac{40\times 10^{-3}\sin\left(\frac{2\pi}{40\times 10^{-3}}6\times 10^{-3}\right)}{500\times 10^{-4}}$$

$B \cong 647\,mT$

Resposta:

$B \cong 647\,mT$