Nome: ____	Número: __________

ELECTROMAGNETISMO

Lic. Eng. Eletrotécnica – Telecomunicações e Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

DEE Departamento de Engenharia Electrotécnica

Prova de exame de época normal: 2023-01-24

Ano Letivo 2022/23, 1.º semestre, duração: 90 min.

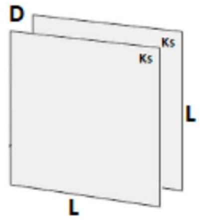
A prova termina com a palavra fim escrita em letras maiúsculas.

Todas as deduções devem ser apresentadas.

GRUPO I (2 valores):

Considere duas placas quadradas de lado **L**. Estas encontram-se paralelamente sobrepostas entre si e distanciadas de **D**, tal como indicado na figura ao lado. Ambas estão eletrizadas com densidade de carga superficial **Ks** e a permissividade relativa do dielétrico é **Er**.

Deduza a expressão da força de repulsão, **Fr**, exercida entre as placas. Ignore o espraiamento.



Dados: L D Ks Er

Formulário: $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\vec{a}_R$ $\quad \vec{F} = Q\vec{E}$

Resolução:

$\vec{F} = Q\vec{E} \quad => \quad d\vec{F} = \vec{E}dQ \quad => \quad d\vec{F} = \vec{E}K_s ds$

$d\vec{F} = \frac{K_s}{2\varepsilon}\vec{a}_R K_s ds \quad => \quad \vec{F} = \int_s \frac{K_s}{2\varepsilon}\vec{a}_R K_s ds \quad => \quad \vec{F} = \frac{K_s}{2\varepsilon}\vec{a}_R K_s \int_s ds$

como a superfície s é quadrada de lado L

$\vec{F} = \frac{1}{2\varepsilon}\vec{a}_R K_s^2 L^2 \quad => \quad \vec{F} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\varepsilon_r} K_s^2 L^2 \vec{a}_R$

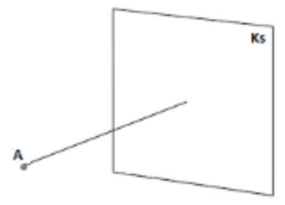
Resposta: $\vec{F} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\varepsilon_r} K_s^2 L^2 \vec{a}_R$

Nome: ____	Número: __________

GRUPO II (3 valores):

Considere um plano, supostamente infinito, uniformemente eletrizado com densidade de carga superficial **Ks = 120 μC/m²** e o ponto **A** que dista **50 mm** do referido plano. A permissividade relativa, **Er**, do meio é **2.**

Determine a diferença de potencial entre o ponto **A** e a superfície do plano.



Dados: $A = 50\ \text{mm}$ $\quad E_r = 2$ $\quad Ks = 120\ \mu C/m2$

Formulário: $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$ $\quad \vec{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon}\vec{a}_R$

Permissividade elétrica do vácuo: $8{,}854187 \times 10^{-12}$ C/m/N

Resolução:

$$V_{AP} = -\int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad => \quad V_{AP} = -\int_P^A \frac{K_S}{2\varepsilon}\vec{a}_R \cdot d\vec{L} \quad => \quad V_{AP} = -\int_P^A \frac{K_S}{2\varepsilon}\vec{a}_R \cdot \vec{a}_R dL \quad =>$$

$$V_{AP} = -\int_P^A \frac{K_S}{2\varepsilon} dL \quad => \quad V_{AP} = -\frac{K_S}{2\varepsilon}\int_P^A dL \quad => \quad V_{AP} = -\frac{K_S}{2\varepsilon}(A - P) \quad =>$$

$$V_{AP} = -\frac{120 \times 10^{-6}}{2 \times 2 \times 8.854187 \times 10^{-12}}(50 \times 10^{-3} - 0) \cong -170\ \text{kV}$$

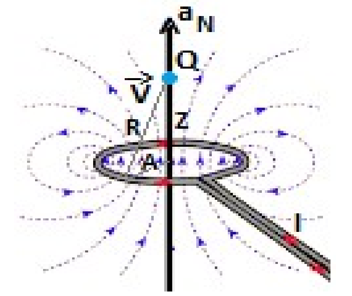
Resposta: $V_{AP} \cong -170\ \text{kV}$

Nome: ____	Número: __________

GRUPO III (3 valores):

Considere uma espira circular de raio **A** na qual circula uma corrente elétrica **I**. Considere ainda que segundo o seu eixo se desloca uma carga elétrica **Q** com a velocidade **V**, tal como indicado na figura ao lado.

1) Deduza a expressão do campo magnético ao longo do eixo da espira e
2) mostre que a força exercida sobre a carga **Q**, devida ao campo magnético gerado pela espira, é nula.



1)

Dados: A I $pf = (0, \alpha, Z)$ $pi = (A, \theta, 0)$

Formulário: $d\vec{H} = \frac{Id\vec{l}}{4\pi R^2} \times \vec{a}_r$ $d\vec{l} = d\rho\vec{a}_\rho + \rho d\varphi\vec{a}_\varphi + dz\vec{a}_z$

Resolução:

Em coordenadas retangulares $pf - pi = (0,0,Z) - (A\cos(\theta), A\sin(\theta), 0) = (-A\cos(\theta), -A\sin(\theta), Z)$

convertendo para coordenadas cilíndricas $pf - pi = (A, \theta + \pi, Z) = (-A, \theta, Z)$ e $|pf - pi| = R = \sqrt{A^2 + Z^2}$

em coordenadas cilíndricas o percurso da corrente é apenas segundo $\vec{a}_\theta$, logo: $d\vec{l} = 0 + Ad\theta\vec{a}_\theta + 0$

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{l}}{4\pi R^2} \times \vec{a}_r \Rightarrow d\vec{H} = \frac{IAd\theta\vec{a}_\theta}{4\pi R^2} \times \vec{a}_r \Rightarrow d\vec{H} = \frac{I\,A\,d\theta\,\vec{a}_\theta}{4\pi(A^2+Z^2)^{3/2}} \times (-A, \theta, Z) \Rightarrow d\vec{H} = \frac{I\,A\,d\theta}{4\pi(A^2+Z^2)^{3/2}} \times (Z, 0, A)$$

devido à simetria do campo, para os pontos do eixo Z, a resultante é apenas segundo $\vec{a}_z$

$$d\vec{H} = \frac{I\,A^2\,d\theta\,\vec{a}_z}{4\pi(A^2+Z^2)^{3/2}} \Rightarrow \vec{H} = \int_0^{2\pi} \frac{I\,A^2\,\vec{a}_z}{4\pi(A^2+Z^2)^{3/2}}\,d\theta \Rightarrow \vec{H} = \frac{I\,A^2\,\vec{a}_z}{4\pi(A^2+Z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}}\,\vec{a}_z$$

Resposta: $\vec{H} = \frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}}\,\vec{a}_z$

2)

Dados: Q V da alínea 1) $\vec{H} = \frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}}\,\vec{a}_z$

Formulário: $\vec{F} = Q\vec{U} \times \vec{B}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Resolução:

Como a velocidade da carga é segundo Z e tem módulo V, tem-se: $\vec{U} = V\,\vec{a}_z$

$$\vec{F} = Q\vec{U} \times \mu\vec{H} \Rightarrow \vec{F} = Q\vec{U} \times \mu\frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}}\,\vec{a}_z \Rightarrow \vec{F} = QV\,\vec{a}_z \times \mu\frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}}\,\vec{a}_z$$

como $\vec{a}_z \times \vec{a}_z = 0$ então: $\vec{F} = Q\mu\frac{I\,A^2}{2(A^2+Z^2)^{3/2}} \times 0 = 0$

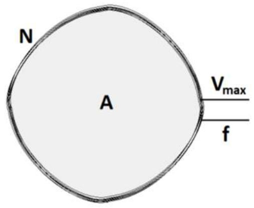
Resposta: $\vec{F} = 0$ c.q.d.

Nome: ________________________________	Número: __________

GRUPO IV (3 valores):

Considere um enrolamento planar com **N = 200** espiras delimitando uma área **A = 25 cm²**. Sabendo que, sem carga, aos terminais do enrolamento é observada uma tensão sinusoidal com valor de pico $\mathbf{V_{max}}$ **= 500 mV** e frequência **f = 5000 Hz**.

Determine o valor máximo da densidade de fluxo magnético, $\mathbf{B_{max}}$, segundo a perpendicular ao enrolamento.



Dados: N=200 A=25 cm^2 V_{max}=500 mV f=500 Hz

Formulário: $V = -N\frac{d\Phi}{dt}$

Resolução:

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad => \quad V = -N\frac{dB}{dt} \quad => \quad V = -NA\frac{dB}{dt}$$

como a forma de onda é sinusoidal a menos de uma constante, C, arbitrária

$$V = -NA\frac{d(B_{max}\sin(\omega t+\varphi)+C)}{dt} \quad => \quad V = -NA\,\omega\, B_{max}\cos(\omega t+\varphi)$$

V_{max} ocorre quando a função trigonométrica toma o valor -1

$$V_{max} = NA\,\omega\, B_{max} \quad => \quad V_{max} = NA \times 2\pi\, f\, B_{max} \quad => \quad B_{max} = \frac{V_{max}}{NA\times 2\pi\, f} \quad =>$$

$$B_{max} = \frac{500\times10^{-3}}{200\times25\times10^{-4}\times2\pi\times500} \quad => \quad B_{max} = \frac{10^{-3}}{\pi} \cong 318\mu T$$

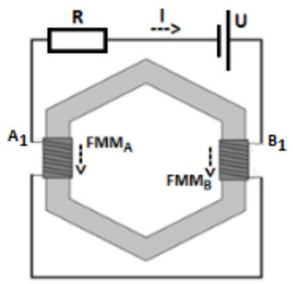
Resposta: $B_{max} \cong 318\mu T$

Nome: ______________________________	Número: __________

GRUPO V (3 valores):

Considere o circuito magnético linear apresentado na figura ao lado. O núcleo tem comprimento médio, $\mathbf{L_M}$, desconhecido, secção **15 cm²** e permeabilidade magnética relativa **150 000**. Um dos enrolamentos tem **250 espiras** e o outro tem **50 espiras**. Nas condições presentes a corrente nos enrolamentos é de **5 A**. As forças magneto-motrizes geradas em cada enrolamento têm os sentidos indicados na figura. Ambos os enrolamentos estão perfeitamente ajustados ao núcleo e a indutância vista aos terminais $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B_1}$ é de **20 mH**, determine:

1) o comprimento médio, $\mathbf{L_M}$, do núcleo;
2) a magnitude do fluxo magnético no núcleo e
3) o campo magnético no núcleo.



Dados: $S=15$ cm2 $\quad \mu_r=150\,000 \quad N_A=250 \quad N_B=50 \quad I=5$ A $\quad L_{A1B1}=20$ mH

Permeabilidade magnética do vácuo $1{,}2566\times10^{-6}$ H/m (ou T·m/A)

Formulário: $L = \frac{N\varphi}{I} \qquad NI = \Re\varphi \qquad \Re = \frac{l}{\mu A} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$

1)

Resolução:

$$\begin{cases} L = \frac{N\varphi}{I} \\ NI = \Re\varphi \\ \Re = \frac{L_M}{\mu A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{L}{N} = \frac{\varphi}{I} \\ \frac{N}{\Re} = \frac{\varphi}{I} \\ \Re = \frac{L_M}{\mu A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{L}{N} = \frac{N}{\Re} \\ \Re = \frac{L_M}{\mu A} \end{cases} \quad => \quad L_M = \frac{\mu_r \mu_0 A N^2}{L} \quad =>$$

$$L_M = \frac{150000\times1.2566\times10^{-6}\times15\times10^{-4}(250- \quad)^2}{20\times10^{-3}} \quad => \quad L_M = 565.47 \text{ m}$$

Resposta: $L_M = 565.47$ m

2)

Resolução:

$$L = \frac{N\varphi}{I} \quad => \quad \varphi = \frac{LI}{N} \quad => \quad \varphi = \frac{20\times10^{-3}\times5}{|250-5 \quad |} \quad => \quad \varphi = 500\ \mu\text{Wb}$$

Resposta: $\varphi = 500\ \mu$Wb

3)

Resolução: da alínea anterior $\varphi = 500\ \mu$Wb

$$\vec{B} = \mu\vec{H} => \quad H = B/\mu \quad \text{e como } \varphi = B\times S \quad => \quad H = \frac{\varphi}{S\mu} \quad => \quad H = \frac{\varphi}{S\,\mu_r\,\mu_0}$$

$$H = \frac{500\times10^{-6}}{15\times10^{-4}\times150000\times1.2566\times10^{-6}} \cong 1.768$$

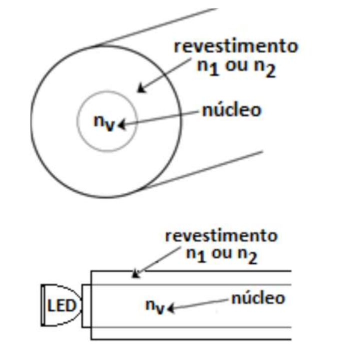
Resposta: $H \cong 1.768$ A/m

Nome: ____	Número: __________

GRUPO VI (3 valores):

Considere uma vareta plástica que apresenta índice de refração $\mathbf{n_v = 4}$ para o feixe de luz vermelha emitido por um determinado LED acoplado a uma das extremidades da vareta. Considere ainda que dispõe de dois materiais para revestir a vareta. Um deles apresenta índice de refração $\mathbf{n_1 = 3}$ e outro apresenta índice de refração $\mathbf{n_2 = 5}$. Determine:

1) qual dos revestimentos deve utilizar para que seja possível a reflexão interna total do feixe de luz e
2) qual o ângulo crítico a partir do qual a reflecção interna total se verifica.



Dados: $n_v = 4$ $n_1 = 3$ $n_2 = 5$

Formulário: $\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

1)

Resolução:

$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_{exterior}}{n_{interior}}\right)$ o domínio da função arcsin é de -1 a 1 e como os índices de refração grandezas positivas

$0 \leq \frac{n_{exterior}}{n_{interior}} \leq 1$ => $n_{exterior} \leq n_{interior}$ como o material interior tem índice de refração n_v

$n_{exterior} \leq n_v$ => $n_{exterior} \leq 4$ logo $n_{exterior} = n_1 = 3$

Resposta: 0 revestimento deve ser feito com o material com índice de refração 3.

2)

Resolução:

$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_{exterior}}{n_{interior}}\right)$ => $\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ => $\theta_c = 48.59°$

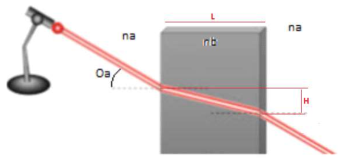
Resposta: $\theta_c = 48.59°$

Nome: ____ | Número: __________

GRUPO VII (3 valores):

Considere o artefacto exposto na figura ao lado que se pretende utilizar para determinar o índice de refração que um determinado material translucido apresenta a um feixe de luz emitido por um LED. O meio exterior ao provete é o vazio. O angulo de incidência do feixe é de **30º** e a largura do provete, **L**, é de **60 mm**. Sabendo que a altura, **H**, observada é de **15 mm** determine:

1) o índice de refração do material que constituí o provete e
2) a velocidade da luz no interior do provete.



Dados: $\theta_1 = 30°$ L=60 mm H=15 mm

Formulário: $\mathbf{n_1 sin(\theta) = n_2 sin(\theta_t)}$ $\boldsymbol{V = \frac{c}{n}}$ c = 2,99792458 x 10^8 m/s

1)

Resolução:

$n_1 \sin(\theta) = n_2 \sin(\theta_t)$ => $1 \times \sin(30) = n_2 \sin(\theta_t)$ como $\sin(\theta_t) = \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}$ tem-se:

$$n_2 = \frac{\sqrt{15^2 + 60^2}}{2 \times 15} \cong 2.06155$$

Resposta: O índice de refração do provete é aproximadamente 2.06155.

2)

Resolução:

$V = \frac{c}{n}$

da alínea anterior n=2.06155, logo: $V = \frac{2{,}99792458 \text{ x } 10^8}{2.06155}$ => $V = 1.454209008$ m/s

Resposta: $V = 1.454209008$ m/s

FIM