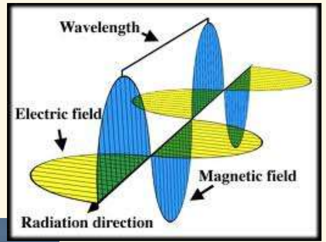
ENGENHARIA
Telecomunicações e Informática

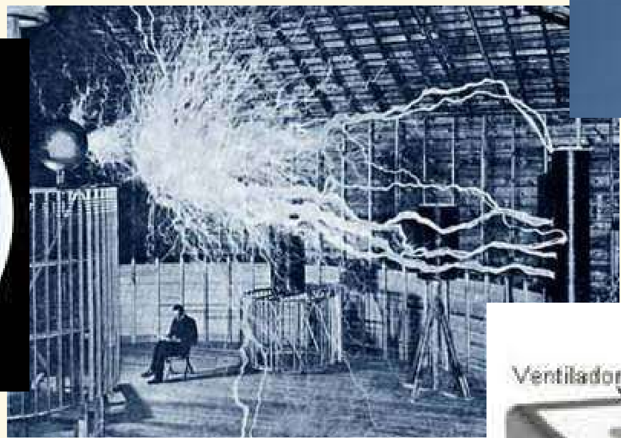
ELETROMAGNETISMO 2023/2024
ELECTROMAGNETISM 2023/2024

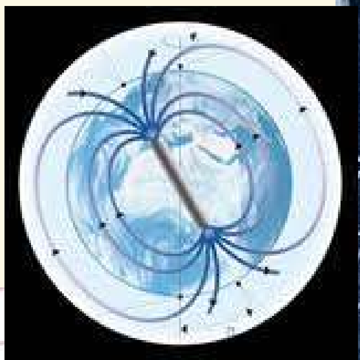
ELECTROMAGNETISMO
ELECTROMAGNETISM

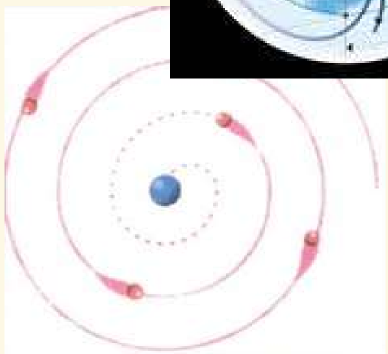
- Equações de Maxwell

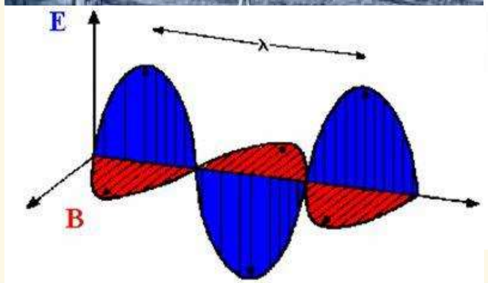
  Maxwell's Equations

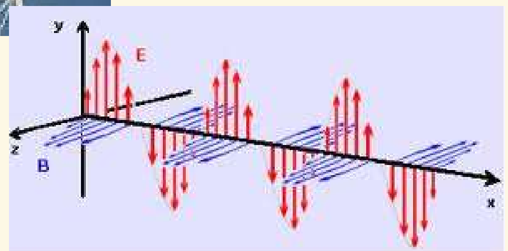


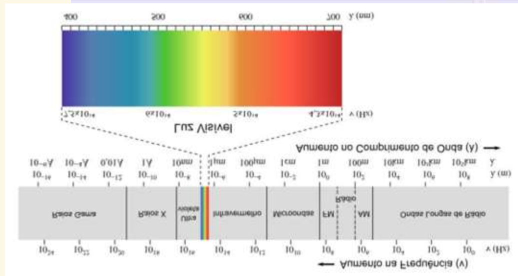












EQUAÇÕES DE MAXWELL
MAXWELL'S EQUATIONS

- Fenómenos atmosféricos
- Atmospheric phenomena
- Navegação e descobrimentos (bússola)
- Navigation and discoveries (compass)
- Máquinas eléctricas
- Electrical machines
- Transporte de energia eléctrica
- Electricity transmission
- Telecomunicações
- Telecommunications

....

EQUAÇÕES DE MAXWELL
MAXWELL'S EQUATIONS

Forma Diferencial Differential Form	Forma Integral Integral Form	
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$	$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$	(lei de Ampère) (Ampère's law)
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$	$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$	(lei de Faraday) (Faraday's law)
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$	$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dv$$	(lei de Gauss do campo eléctrico) (Gauss's law for the electric field)
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$	$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$	(lei de Gauss campo magnético) (Gauss's law for the magnetic field)

E – campo eléctrico
E – electric field
H – campo magnético
H – magnetic field

D – densidade de fluxo eléctrico
D – density of electric flux
B – densidade de fluxo magnético
B – magnetic flux density

Ψ – fluxo eléctrico
Ψ – electrical flux
ϕ – fluxo magnético
ϕ – magnetic flux

$$\nabla \cdot (-) \equiv \mathrm{div}(-) \qquad \nabla \times (-) \equiv \mathrm{rot}(-)$$
$$\nabla (-) \equiv \mathrm{grad}(-) \qquad \nabla^2 (-) \equiv \mathrm{lap}(-)$$

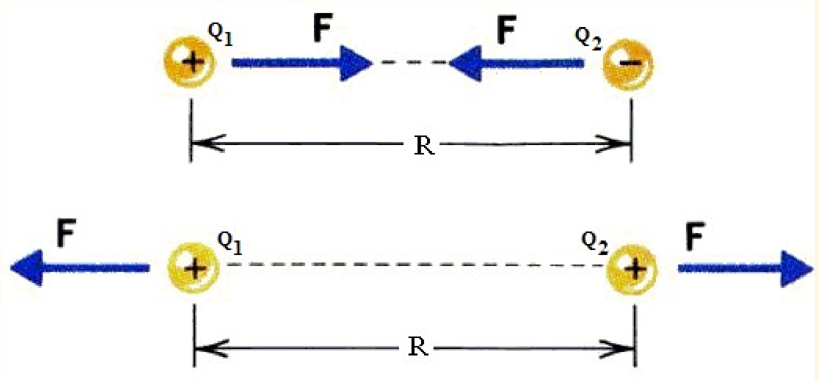
ρ – densidade de carga eléctrica
J – densidade de corrente de condução

ρ - density of electric charge
J - conduction current density

Em espaço livre Jc=0 e ρ=0
In free space Jc=0 e ρ=0

1 - FORÇAS DE COULOMB E CAMPO ELÉTRICO
COULOMB FORCES AND ELECTRIC FIELD

- Lei de Coulomb
- Coulomb's Law

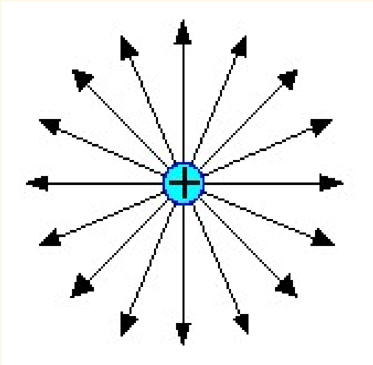


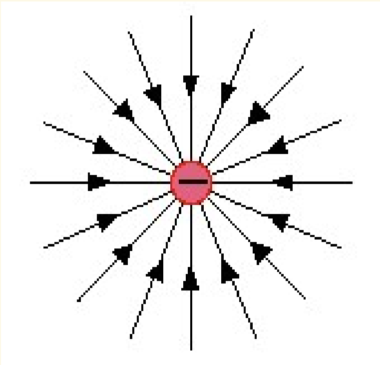
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\vec{a}_{21}$$

F – Força que actua em Q_1 F – Force acting on Q1

a_{21} – versor orientado de Q_2 para Q_1 a_{21} – oriented unit vector from Q2 to Q1

- Campo Eléctrico
- Electric Field





$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{a}_R$$

E – Campo eléctrico provocado por Q à distância R de Q

a_R - versor orientado de Q para o ponto que se encontra à distância R de Q

E - electric field caused by Q at distance R from Q

a_R - oriented unit vector from Q to the point which is at distance R from Q

$$\varepsilon = \varepsilon_R \varepsilon_0$$

- Lei de Coulomb
- Coulomb's Law

- Campo Eléctrico
- Electric Field

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Força electrostática a que fica sujeita a carga Q_1 quando na presença do campo eléctrico E

Electrostatic force acting in the charge Q1 when it is in the presence of the electric field E

1 - FORÇAS DE COULOMB E CAMPO ELÉCTRICO
COULOMB FORCES AND ELECTRIC FIELD

Diferencial de campo eléctrico
provocado por uma carga infinitesimal

Differential of electric field produced
by an infinitesimal charge

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{a}_R$$

- Linha Carregada
- Electrical charged Line

$$\rho = \frac{dQ}{dl}$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon R^2}dl$$

- Superfície Carregada
- Electrical Charged Surface

$$\rho = \frac{dQ}{ds}$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon R^2}ds$$

- Volume Carregado
- Electrical Charged Volume

$$\rho = \frac{dQ}{dv}$$

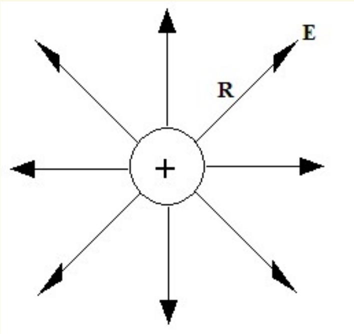
$$d\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon R^2}dv$$

1 - FORÇAS DE COULOMB E CAMPO ELÉCTRICO
COULOMB FORCES AND ELECTRIC FIELD

- Exemplos de campo eléctrico para diferentes configurações
- Examples of electric field for different configurations

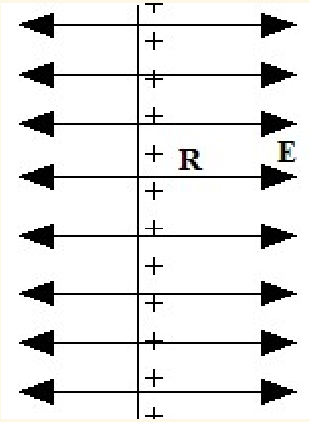
- Carga pontual
- point electrical charge

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{a}_R$$



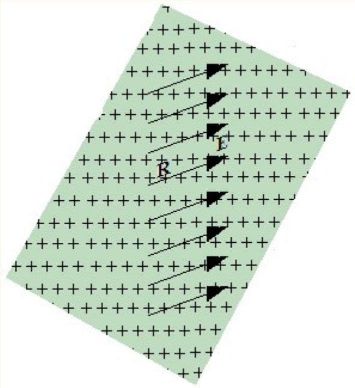
- Linha recta
- straight line

$$\vec{E} = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon R}\vec{a}_R$$



- Plano infinito
- infinite plane

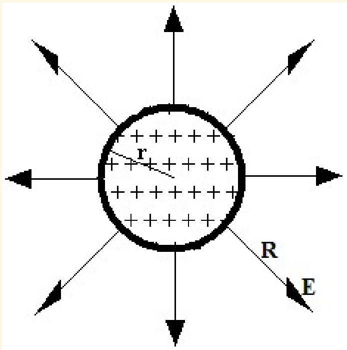
$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\vec{a}_R$$



- Sólido esférico isolante
- Spherical Solid Insulating

$$\vec{E} = \frac{r^3\rho_v}{3\varepsilon(r+R)^2}\vec{a}_R ; R \geq 0$$

$$\vec{E} = \frac{(r+R)\rho_v}{3\varepsilon}\vec{a}_R ; R < 0$$



1 - FORÇAS DE COULOMB E CAMPO ELÉCTRICO
COULOMB FORCES AND ELECTRIC FIELD

- Recorrendo da expressão da força electrostática e das várias expressões do campo eléctrico, ou da sua definição, é possível encontrar a força resultante numa carga pontual.
- Using the expression of the electrostatic force and the various expressions of the electric field, or its definition, it is possible to find the resulting acting force on a point electrical charge.

- exercícios....
- exercises....

Exercícios Exercises

Ilustre todas as respostas Illustrates all the answers

1) Duas cargas pontuais Q1 e Q2 no vazio, respectivamente, de 0,5mC e 0,1mC estão localizadas num referencial cartesiano em (0,0,0)m e em (2,1,2)m. Two electrical point charges Q1=0,5mC and Q2=0,1mC are in the vacuum located in a Cartesian frame at (0,0,0) and at (2,1,2)m, respectively.

a) Determine o campo eléctrico no local de Q1, na sua ausência. Calculate the electric field at the location of Q1 in its absence.
b) Determinar a força exercida sobre Q1. Calculate the force acting on Q1.

2) Considere que ao sistema anterior foi adicionada uma carga Q3 de -0,2mC em (1,2,0)m. Assume that was added an electrical charge of Q3=-0,2mC at (1,2,0)m to the previous system

a) Recalcule 1)a). Recalculate 1)a).
b) Recalcule 1)b). Recalculate 1)b).
c) Determine a força exercida por cada uma das cargas, Q2 e Q3, sobre Q1 e calcule a sua soma vectorial. Calculate the force of each of the charges, Q2 and Q3 over Q1 and calculate their vector sum.
d) Comente o resultado obtido nas alíneas b) e c). Comment the results in b) and c).

1 - FORÇAS DE COULOMB E CAMPO ELÉCTRICO
COULOMB FORCES AND ELECTRIC FIELD

3) Considere uma carga Q de 1uC que se encontra no vazio na presença de um plano carregado supostamente infinito. A carga dista 10 cm do plano e este apresenta uma densidade de carga de -3 uC/m2. Assume an electrical charge Q of 1uC. It is in the vacuum in the presence of a plane supposedly infinity. The charge Q is at the distance of 10cm from the plane which has an electrical charge density of -3uC/m2.

a) Determine o campo eléctrico no local de Q sem a sua presença. Calculate the electric field at Q without his presence.
b) Determine a força, modulo direcção e sentido, a que a carga Q está submetida. Calculate the strength, direction and magnitude which Q is submitted.

4) Considere uma carga Q de 1uC que se encontra no vazio na presença de um condutor rectilíneo carregado supostamente infinito. A carga dista 10 cm do condutor e este apresenta uma densidade de carga de -3uC/m. Assume an electrical charge Q=1uC in the vacuum at 10 Cm from an electrical charged straight line supposedly infinity. The line its electrical charge density is of -3uC /m.

a) Determine o campo eléctrico no local de Q sem a sua presença. Calculate the electric field at Q without his presence.
b) Determine a força, modulo direcção e sentido, a que a carga Q está submetida. Calculate the strength, direction and magnitude which Q is submitted.

5) Considere o plano, a recta e a carga Q de 1udas duas alíneas anteriores. Sabendo que a recta dista 10 cm do plano ao qual é paralela e que Q se encontra na mediatriz do segmento normal ao plano e a recta, determine:

Assume the plane, the straight line and the charge Q=1uC of the two previous questions (3 and 4). Suppose that the line is distant 10 cm from the plane and is parallel to it. For last, assume that Q is placed in the middle of the normal to the plane and to the line. Calculate:

a) o campo eléctrico no local de Q provocado pelo plano carregado;
   the electric field at the place of Q caused by the electrical charged plane;
b) o campo eléctrico no local de Q provocado pela recta carregada;
   the electric field at the place of Q caused by the electrical charged straight line;
c) o campo eléctrico resultante no local de Q;
   the resultant electric field at the place of Q;
d) a força exercida sobre Q resultante da acção do plano carregado;
   the force acting on Q resulting from the action of the electrical charged plane;
e) a força exercida sobre Q resultante da acção da recta carregada;
   the force acting on Q resulting from the action of the electrical charged straight line;
f) de duas formas distintas a força resultante exercida sobre a carga Q.
   from two distinct forms the resultant force acting on the charge Q.

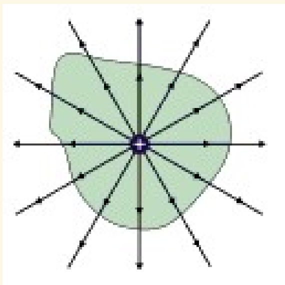
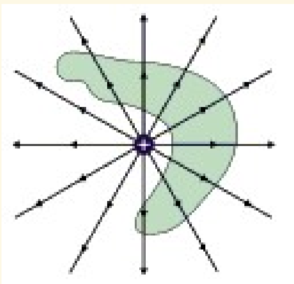
2 - LEI DE GAUSS E FLUXO ELÉCTRICO
GAUSS'S LAW AND ELECTRIC FLUX

- Lei de Gauss
- Gauss's Law

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int}$$

O fluxo total que sai de uma superfície fechada é igual à carga a ela interna.

The total flux coming out of a closed surface is equal to the sum of the electrical charge internal to this surface.

- Fluxo Eléctrico
- Electric flux

$$\psi_D = Q_{int} \qquad \psi_D = \varepsilon \psi_E$$

Por definição, o fluxo eléctrico tem origem numa carga positiva e termina numa carga negativa ou, na ausência desta, no infinito.

By definition, the electrical flux is from a positive charge to a negative or, failing that, to the infinite.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

A densidade de fluxo eléctrico e o campo eléctrico num meio linear e isotrópico estão relacionadas pela permissividade desse meio.

The density of electric flux and the electric field in a linear and isotropic medium are related by the permittivity of that medium.

2 - LEI DE GAUSS E FLUXO ELÉCTRICO
GAUSS'S LAW AND ELECTRIC FLUX

- Recorrendo da lei de Gauss é possível encontrar a carga interior a uma superfície fechada para a qual se conhece a densidade do campo eléctrico.

  Using the Gauss's law it is possible to find the inner close surface electrical charge for which is known the density of the electric field.

- exercícios....
- exercises....

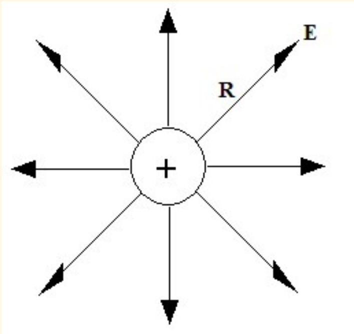
2 - LEI DE GAUSS E FLUXO ELÉCTRICO
GAUSS'S LAW AND ELECTRIC FLUX

- Exercícios
  Exercises

1) Considere uma carga pontual Q num meio linear e isotrópico igual ao vazio. Como se sabe o campo eléctrico por ela criado à distância R é dado pela expressão ao lado.
Consider one point electrical charge Q in a linear and isotropic medium equal to vacuum. As is known the electric field created by it to the range R is given by the equation at right.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R$$

a) Recorrendo da relação entre densidade de fluxo eléctrico e campo eléctrico, determine a correspondente expressão da densidade de fluxo eléctrico.
Using the relation between electric flux density and electric field, find the corresponding expression to determine the density of electric flux.



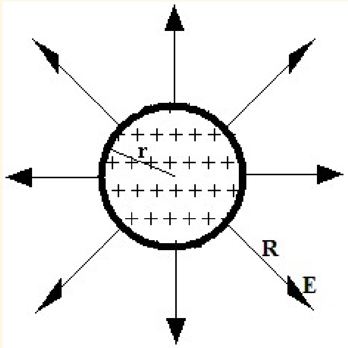
b) Recorrendo da definição da lei de Gauss, mostre que a carga que provoca o campo é a própria carga Q.
Using the definition of Gauss's law, show that the electrical charge causing the electrical field is the electrical charge Q itself.

2 - LEI DE GAUSS E FLUXO ELÉCTRICO
GAUSS'S LAW AND ELECTRIC FLUX

2) Considere uma esfera isolante electrizada no vazio. Como se sabe o campo eléctrico por ela criado à distância R maior que o seu raio é dado pela expressão ao lado.
Consider an electrical charged non conductive sphere in the vacuum. As we know the electric field created by it at a distance greater than its radius R is given by the equation at the left.

$$\vec{E} = \frac{r^3 \rho_v}{3\varepsilon_0 (r+R)^2} \vec{a}_R \,; R \geq 0$$

a) Recorrendo da relação entre densidade de fluxo eléctrico e campo eléctrico, determine a correspondente expressão da densidade de fluxo eléctrico.
Using the relation between electric flux density and electric field, find the corresponding expression to determine the density of electric flux.



b) Recorrendo da definição da lei de Gauss, encontre a expressão da carga total armazenada na esfera.
Using the definition of Gauss's law, find the expression of the total electrical charge stored in the sphere.

3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

- Teor. da divergência
  Divergence theorem

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)dv$$

O fluxo provocado por uma densidade de fluxo que atravessa uma superfície fechada é igual à integral de volume da divergência dessa densidade de fluxo na região interior à superfície.
The flux caused by a flux density through a closed surface equals the integral of the divergence of that volume flux density in the inner surface region.

- Lei de Gauss
  Gauss's Law

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{int}$$

O fluxo total que sai de uma superfície fechada é igual à carga a ela interna.
The total flux coming out of a closed surface is equal to the internal electrical charge.

$$\int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)dv = Q_{int}$$

3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

- Do teorema da divergência e da lei de Gauss

  From the divergence theorem and Gauss' law

- Densidade infinitesimal de carga ou densidade de carga

  Infinitesimal charge density or charge density

$$\frac{d}{dv}\int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) dv = \frac{d}{dv} Q_{int}$$

$$\frac{dQ}{dv} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

O divergente da densidade de fluxo eléctrico num ponto é a densidade de carga eléctrica nesse mesmo ponto.

The divergence of the electric flux density at a point is the density of electric charge on that point.

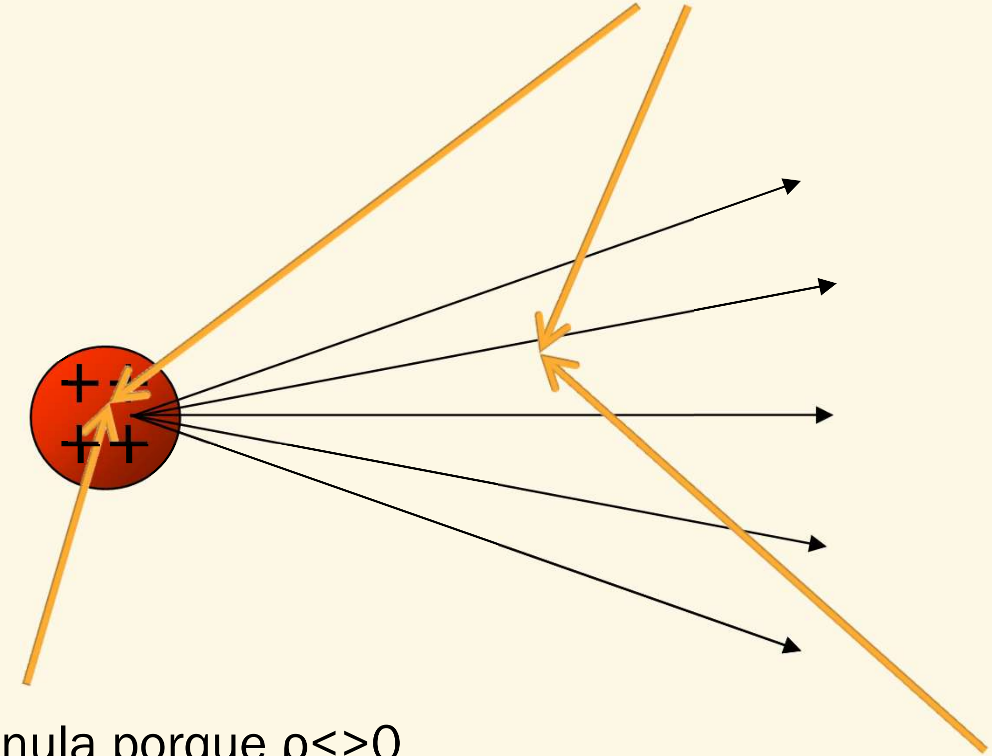
3 - SIGNIFICADO DE DIVERGÊNCIA
MEANING OF DIVERGENCE

Divergência de um campo <> Campo a divergir

Divergence of a field <> field diverging

O campo eléctrico diverge

The electric field diverges



A divergência não é nula porque $\rho<>0$

because $\rho <> 0$, the divergence is not zero

A divergência é nula porque $\rho=0$

because $\rho = 0$, the divergence is zero

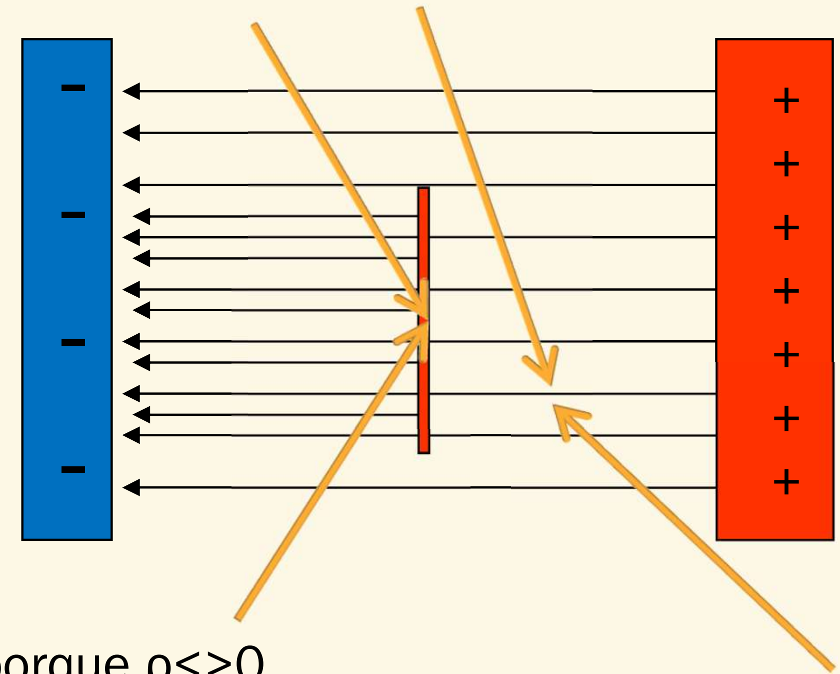
3 - SIGNIFICADO DE DIVERGÊNCIA
MEANING OF DIVERGENCE

Divergência de um campo <> Campo a divergir

Divergence of a field <> field diverging

O campo eléctrico não diverge

The electric field does not diverge



A divergência não é nula porque ρ<>0

Because ρ <> 0, the divergence is not zero

A divergência é nula porque ρ=0

Because ρ = 0, the divergence is zero

3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

- Recorrendo do teorema da divergência é possível, tal como com a lei de Gauss, encontrar a carga interior a uma superfície fechada para a qual se conhece a densidade do fluxo eléctrico.

  Using the divergence theorem it is possible, as well as with Gauss's law, find the inner charge to a closed surface for which we know the density of electric flux.

- Recorrendo do divergente é possível encontrar a densidade de carga espacial.

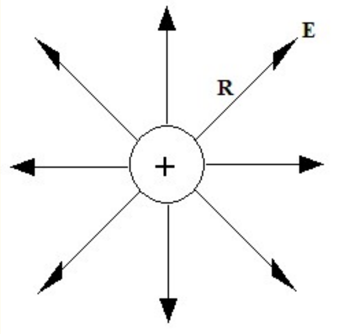
  Using the divergence it is possible to find the density of space charge.

  - exercícios....
  - exercises....

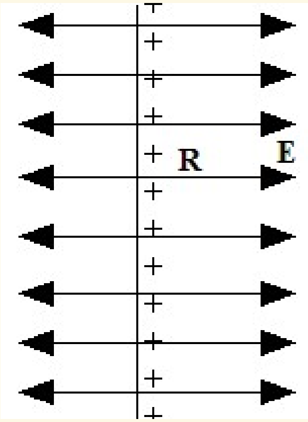
3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

- Exercícios
  Exercises

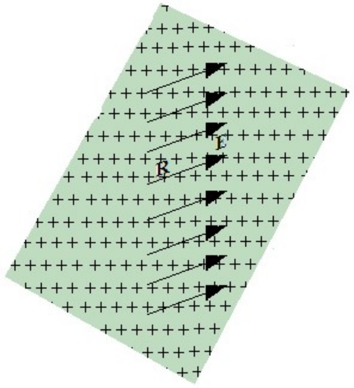
1) Mostrar que o divergente da densidade de fluxo eléctrico gerado por uma carga pontual é nulo.
   Show that the divergent of the electric flux density generated by a point charge is zero.



2) Mostrar que o divergente da densidade de fluxo eléctrico gerado por uma linha recta infinita uniformemente carregada é nulo.
   Show that the divergent of the electric flux density generated by a uniformly charged infinite straight line is zero.



3) Mostrar que o divergente da densidade de fluxo eléctrico gerado por um plano uniformemente carregado é nulo.
   Show that the divergent of the electric flux density generated by uniformly charged plane is zero.



3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

4) Considere uma esfera isolante electrizada no vazio. Como se sabe, o campo eléctrico por ela criado à distância R da sua superfície é o dado pelas expressões ao lado. (adapte devidamente a expressão ao referencial)

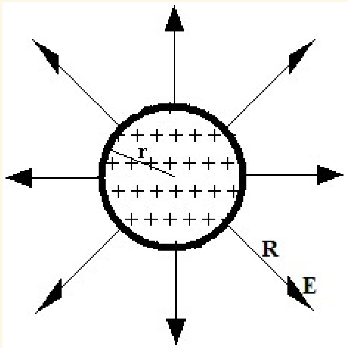
Consider an insulated sphere in the vacuum with uniformly electrical charge distribution. As is known, the electric field created by it at the distance R from the surface is given by the expressions on the left. (suitably adapt to the expression reference)

$$\vec{E} = \frac{r^3 \rho_v}{3\varepsilon(r+R)^2}\vec{a}_R ; R \geq 0$$

$$\vec{E} = \frac{(r+R)\rho_v}{3\varepsilon}\vec{a}_R ; R < 0$$

a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico gerado pela carga armazenada na esfera dentro e fora dela.

Establish analytically the divergence of the electric flux density generated by the electrical stored charge on the ball inside and outside it.

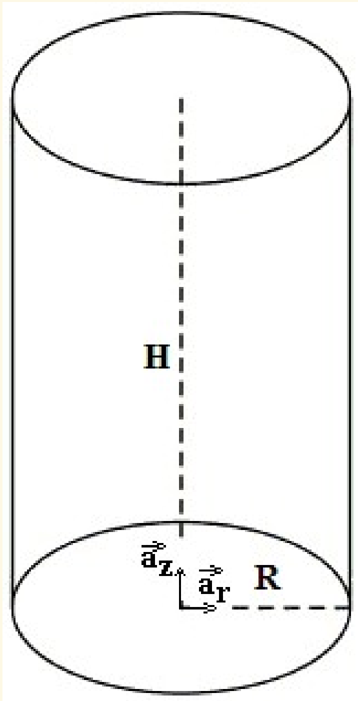


b) Recorrendo do teorema da divergência, encontre a expressão da carga total armazenada na esfera. Confronte este resultado com o obtido anteriormente pela aplicação da lei de Gauss.

Using the divergence theorem, find the expression of the total charge stored in the sphere. Confront this result with that obtained previously by application of Gauss' law.

5) Considere um cilindro electrizado para o qual a equação da densidade de fluxo eléctrico no seu interior dada pela equação ao lado, em coordenadas cilíndricas. (adapte devidamente a expressão ao referencial)
Assume an cylinder for which the inner electric flux density is given by the equation in the left, in cylindrical coordinates. (suitably adapt to the expression reference)

$$\vec{D} = 30\,e^{-r}\vec{a}_r - 2z\vec{a}_z \quad (C/m^2)$$



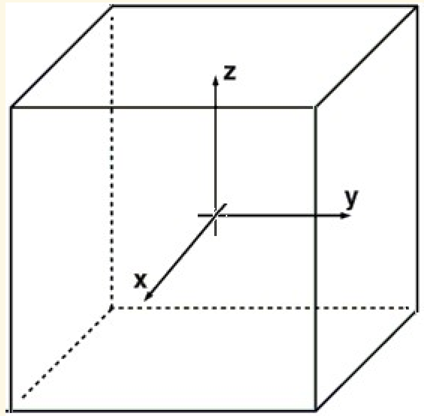
a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico no interior do cilindro e fora dele.
Analytically find the divergent of the electric flux density inside and outside of the cylinder.

b) Calcule os dois lados do teorema da divergência e encontre a expressão da carga total armazenada no cilindro. O cilindro tem altura H e raio R de 10cm e 1cm, respectivamente.
Calculate the two sides of the divergence theorem and find the expression of the total charge stored in the cylinder. The cylinder has a height H and the radius R of 10 cm and 1 cm, respectively.

3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

6) Considere um zona cúbica com 10 cm de lado centrada na origem dum referencial cartesiano ortonormal. A densidade de fluxo eléctrico na região interior do cubo é dada pela expressão ao lado. (adapte devidamente a expressão ao referencial)
Consider a cubic area with 10cm side centered at the origin of a Cartesian orthonormal referential. The electric flux density in the inner region of the cube is given by the equation at the left. (suitably adapt the expression to the reference)

$$\vec{D} = \left[x^2 \vec{a}_x + yz\vec{a}_y + xy\vec{a}_z\right] \quad (\mathrm{C/m^2})$$



a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico no interior do cubo.
Find analytically the divergent of the electric flux density inside the cube.

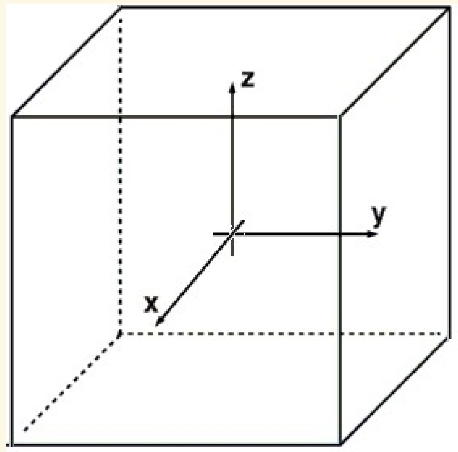
b) Analise os dois lados do teorema da divergência e encontre a expressão da carga total armazenada no cubo.
Examine both sides of the divergence theorem and find the expression of the total charge stored in the cube.

c) Determine a carga total armazenada no cubo.
Find the total electrical charge stored inside the cube.

3 - DIVERGÊNCIA E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA
DIVERGENCE AND DIVERGENCE THEOREM

7) Considere um zona cúbica do espaço de aresta 1 cm definida num referencial cartesiano ortonormal. A densidade de fluxo eléctrico na região é dada pela expressão ao lado. (adapte devidamente a expressão ao referencial)
Consider a cubic region of space with edge of 1 cm defined in a cartesian orthonormal frame. The electric flux density in the region is given by the equation at left. (suitably adapt the expression to the reference)

$$\vec{D} = 5x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\vec{a}_x \quad (C/m^2)$$



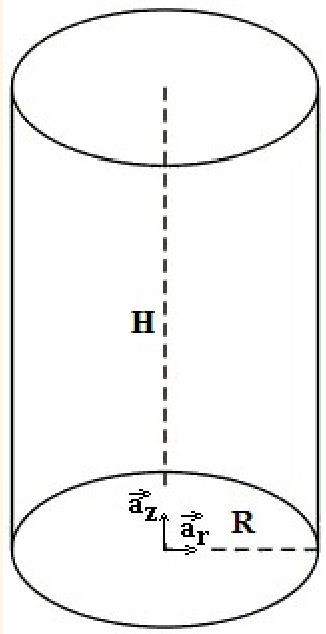
a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico na região.
Find analytically the divergent of the electric flux density in the region.

b) Determine a densidade de carga eléctrica nos vértices do cubo.
Find the electrical charge density in the corners of the cube.

c) Determine a expressão da carga interior ao cubo.
Find the expression of the electrical charge inner to the cube.

$$\vec{D} = r\,\mathrm{sen}(\phi)\vec{a}_r + r^2\cos(\phi)\vec{a}_\phi + 2re^{-5z}\,\vec{a}_z \qquad (\mathrm{C/m^2})$$

8) Considere uma zona do espaço definida num referencial cilíndrico. A densidade de fluxo eléctrico na região é dada pela expressão ao lado. (adapte devidamente a expressão ao referencial)
Consider a region of space defined in a cylindrical reference system. The electric flux density in the region is given by the equation at left. (suitably adapted the expression to the reference)



a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico na região.
Find analytically the divergent of the electric flux density in the region.

b) Determine a densidade de carga no ponto (1/2, π/2, 0).
Find the electrical charge density at the point (1/2, π/2, 0).

9) Considere uma zona do espaço definida num referencial cartesiano. A densidade de fluxo eléctrico na região -1<z<1 é dada pela expressão (1) e pala expressão (2) fora dela. (adapte devidamente a expressão ao referencial)
Assume a region of the space defined in a cartesian reference frame. The electric flux density inside the region -1 <z <1 is given by the expression (1) and by the expression (2) outside. (suitably adapt the expression to the reference frame)

$$(1) \quad \vec{D} = \rho_0 z \vec{a}_z \quad (\text{C/m}^2); \qquad -1 < z < 1$$

$$(2) \quad \vec{D} = \rho_0 \frac{z}{|z|} \vec{a}_z \quad (\text{C/m}^2); \qquad z < -1 \cup z > 1$$

a) Determine analiticamente o divergente da densidade de fluxo eléctrico nas regiões (1) e (2).
Find analytically the divergent of the electric flux density in regions (1) and (2).

b) Determine a densidade de carga nas duas regiões.
Find the electrical charge density in the two regions.

4 - POTENCIAL ELÉCTRICO, ENERGIA E CAPACIDADE
ELECTRIC POTENTIAL, ENERGY AND CAPACITY

- Diferença de potencial eléctrico
  Electric potential difference

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

- Energia armazenada no campo eléctrico
  Energy stored in the electric field

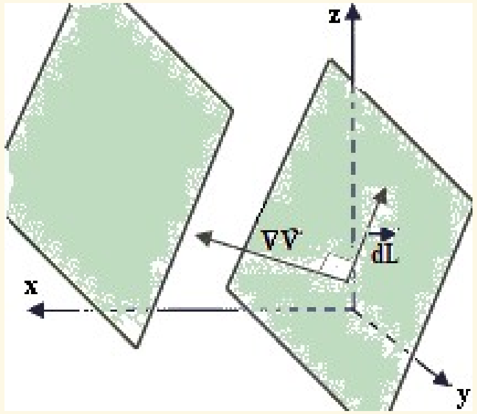
$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv$$

4 - DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉCTRICO
ELECTRIC POTENTIAL DIFFERENCE

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

Da diferença de potencial eléctrico vem a diferença de potencial.

From the electrical potential difference comes the difference of potential.



$$d\vec{L} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dy\,\vec{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{L}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

A intensidade de campo eléctrico pode ser obtida pelo simétrico do gradiente do potencial eléctrico.

The intensity of the electric field can be derived from the symmetric of the electric potential gradient.

4 - ENERGIA ARMAZENADA NO CAMPO ELÉCTRICO
ENERGY STORED IN THE ELECTRIC FIELD

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{D}V\right) = \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)V + \vec{D} \cdot (\nabla V)$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) V dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \left[\nabla \cdot \left(\vec{D}V\right)\right] dv + \frac{1}{2}\int_v \left[-\vec{D} \cdot (\nabla V)\right] dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_s \vec{D} V ds + \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

Para uma superfície esférica s de raio r arbitrariamente grande a distribuição de cargas interior a s é vista como pontual. Assim, em s, V e D são inversamente proporcionais a r e ao quadrado de r, respectivamente. Logo, DV é inversamente proporcional ao cubo de r. Como s é proporcional ao quadrado de r a função integrante é proporcional ao inverso de r. Assim, no limite em que r é infinito o integral é nulo.

For a spherical surface s of radius r arbitrarily large the inner distribution of charge is seen as a point. Thus, in S, V and D are proportional to $1/r$ and to $1/r^2$, respectively. Hence DV is proportional to $1/r^3$. Since S is proportional to r^2 the integral is proportional to $1/r$. Thus, in the limit where r is infinite the integral is zero.

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

4 - ENERGIA ARMAZENADA NO CAMPO ELÉCTRICO
ENERGY STORED IN THE ELECTRIC FIELD

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$$

Energia armazenada no campo eléctrico.
Energy stored in the electric field.

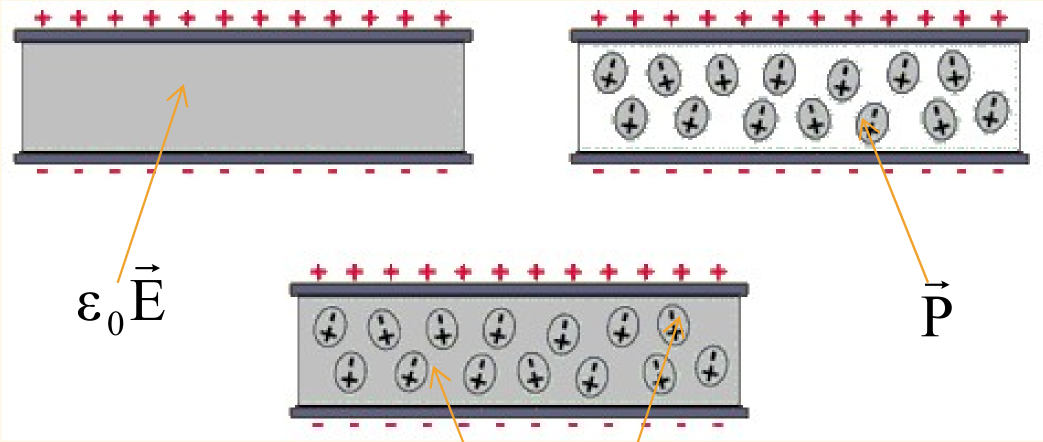
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Relação entre densidade de fluxo eléctrico e campo eléctrico.
Relationship between density of electric flux and electric field.

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2\,dv \qquad W_E = \frac{1}{2}\int_v \frac{D^2}{\varepsilon}\,dv$$

Energia armazenada num volume devido ao campo eléctrico.
Energy stored in the volume due to the electric field.

4 - MATERIAIS DIELÉCTRICOS
DIELECTRIC MATERIALS



A susceptibilidade, X, é uma constante adimensional que representa a relação entre o campo eléctrico, E, e a densidade de polarização dieléctrica induzida P.

The susceptibility, X, is a dimensionless constant which represents the relationship between the electric field, E, and the density of induced dielectric polarization P.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \, X \, \vec{E}$$

$$1 + X = \varepsilon_r$$

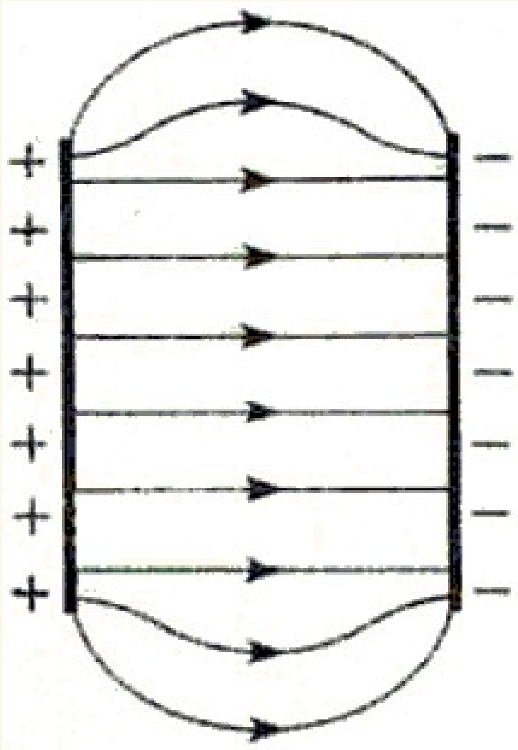
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

4 - CAPACIDADE ELETRICA
ELÉCTRICA CAPACITY

$$C = \frac{Q}{V}$$

Dois corpos condutores separados por um dieléctrico ou no vazio apresentam uma capacidade eléctrica entre eles. Quando aplicada uma diferença de potencial, estes ficam carregados simetricamente sendo constante a relação entre o módulo da carga em cada um deles e a tensão aplicada. Esta constante é a capacidade eléctrica. No SI de unidades tem a unidade Faraday (F).

Two conductive bodies separated by a dielectric or by the empty have a capacitance between them. When a difference of potential is applied, they are loaded symmetrically with a constant ratio between the magnitude of the electrical charge on each one and the applied voltage. This is the electrical capacitance, is constant and in SI its unit is the Faraday (F).



$$\frac{|+Q|}{V} = C = \frac{|-Q|}{V}$$

4 - ENERGIA ARMAZENADA NUM CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS
ENERGY STORED IN A PARALLEL PLATE CAPACITOR

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2 dv \qquad \vec{E} = \frac{V}{d}\vec{a}_n \qquad C = \varepsilon\frac{A}{d}$$

$$W_E = \varepsilon\frac{A}{2d}V^2$$

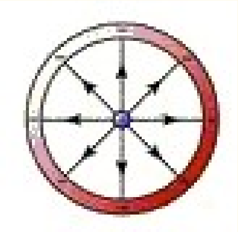
$$W_E = \frac{1}{2}CV^2$$

4 - CAPACIDADE E ENERGIA ARMAZENADA
CAPACITY AND STORED ENERGY

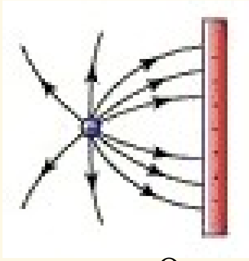
Para qualquer configuração de um condensador eléctrico a energia armazenada é dada por:

For any configuration of an electrical capacitor the stored energy is given by:

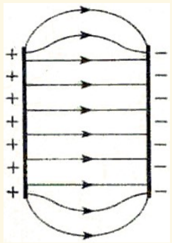
$$W_E = \frac{1}{2}CV^2$$



$C = \frac{Q}{V}$



$C = \frac{Q}{V}$



$C = \frac{Q}{V}$

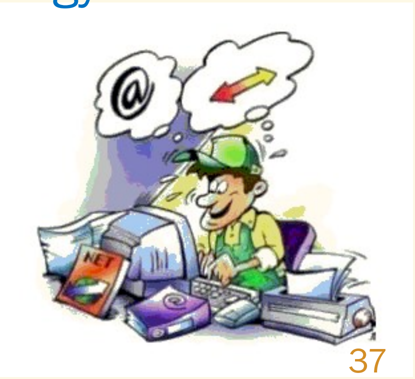
4 - POTENCIAL ELÉCTRICO, ENERGIA E CAPACIDADE
ELECTRIC POTENTIAL, ENERGY AND CAPACITY

- O potencial eléctrico permite obter a intensidade de campo eléctrico por meio do simétrico do seu gradiente.
  The electric potential allows to obtain the electric field intensity by the symmetric of its gradient.

- A energia armazenada num espaço sujeito a um campo eléctrico é função da permissividade do dieléctrico e da intensidade do campo.
  The energy stored in an area subjected to an electric field is a function of the permittivity of dielectric and of the field strength.

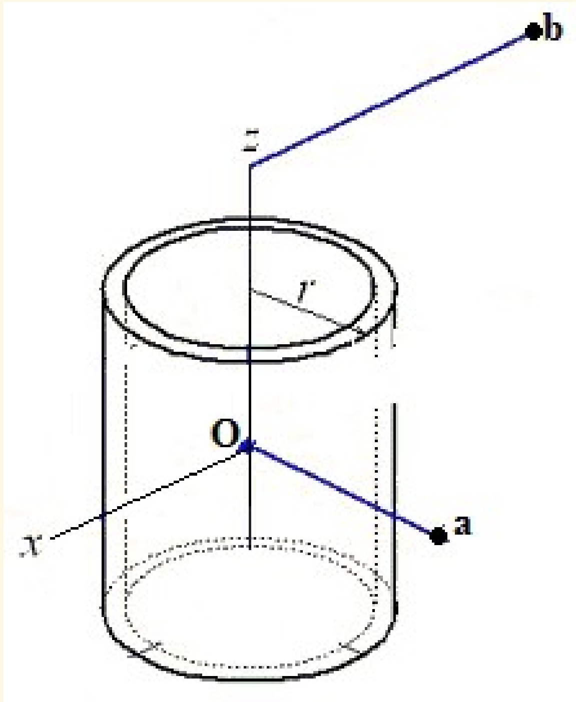
- Conhecida a capacidade equivalente de uma configuração a energia nela acumulada é função da capacidade e da tensão aplicada.
  Known the equivalent capacity of a physical structure the stored energy is a function of the capacity and of the applied voltage.

- exercícios....
- exercises....



4 - POTENCIAL ELÉCTRICO, ENERGIA E CAPACIDADE
ELECTRIC POTENTIAL, ENERGY AND CAPACITY

1) Considere uma linha recta segundo z carregada com uma distribuição linear de cargas de 5nC/m.
   Consider a straight line oriented by z loaded with a linear electrical charge distribution of 5nC/m, see picture at left.



a) Determinar a diferença de potencial entre os pontos a e b tais que: a(2m, π/2, 0) e b(4m, π, 5m).
   Find the electrical potential difference between the points a and b at (2m, π / 2, 0) and at (4m, π, 5m), respectively.

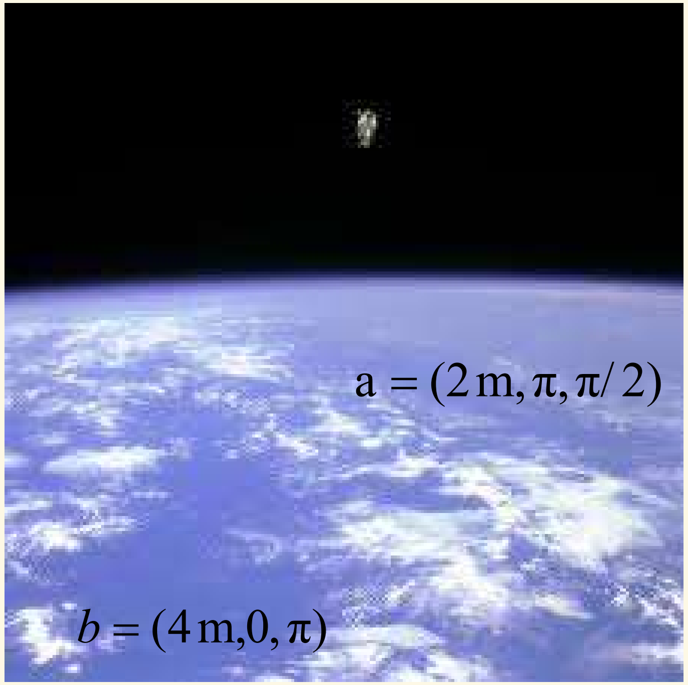
b) Determinar a diferença de potencial entre os pontos a e b tais que: a(2m,0, 0) e b(4m, 0, 0).
   Find the electrical potential difference between the points a and b at (2n, 0, 0) and at (4m, 0, 0), respectively.

c) Compare e comente os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores.
   Compare and discuss the results obtained in the two previous questions.

4 - POTENCIAL ELÉCTRICO, ENERGIA E CAPACIDADE
ELECTRIC POTENTIAL, ENERGY AND CAPACITY

$$\vec{E} = -\frac{16}{r^2}\vec{a}_r \quad V/m$$

2) Numa zona do espaço o campo eléctrico é definido pela equação ao lado em coordenadas esféricas.
   In an area of the space the electrical field is defined by the equation at left in a spherical frame.



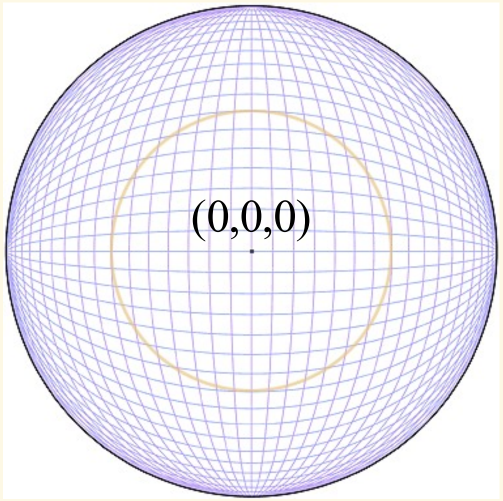
a) Determine a diferença de potencial entre os pontos a e b.
   Find the difference of electrical potential between the points a and b.

b) Mostre que, no presente caso, a diferença de potencial apenas é função de uma coordenada e comente este facto.
   Show that, in this case, the difference of potential is a function of only one coordinate and discuss this.

3) Uma superfície esférica de raio 2m com centro em (0,0,0) tem um potencial eléctrico dado pela equação apresentada ao lado.
   A spherical surface with radius 2m and center in (0,0,0) has an electrical potential given by the equation shown at left.

$$V = V_0; \qquad r < a$$

$$V = a\frac{V_0}{r}; \qquad r \geq a$$



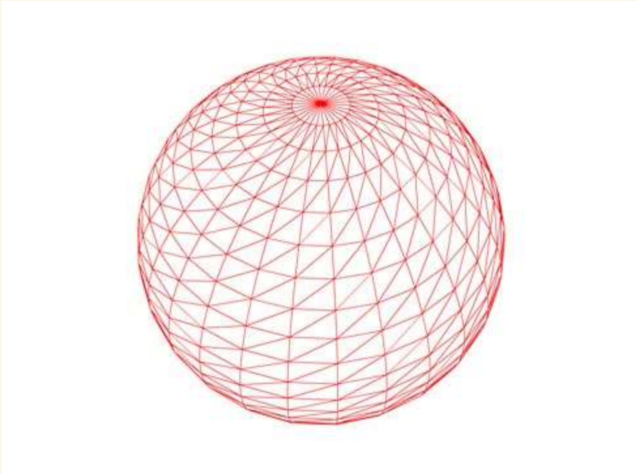
a) Calcule a diferença de potencial entre os pontos P1 e P2 que distam da origem 5m e 3m, respectivamente.
   Find the electrical potential difference between two points P1 and P2 that are distant from the origin of 5m and 3m, respectively.

b) Determine a expressão do campo eléctrico E representado pela equação de potencial dada.
   Find the expression of the electric field E represented by the given equations of electrical potential.

c) Calcule a totalidade da energia armazenada no campo eléctrico.
   Find the total electrical energy stored in the electric field.

d) Utilizando o operador divergente, identifique a densidade de carga nas diferentes zonas.
   Using the divergent operator identify the charge density in different areas.

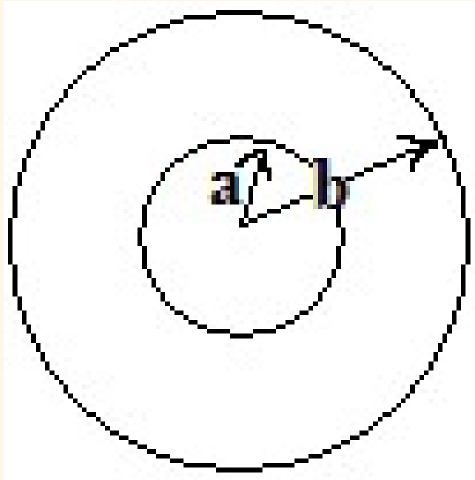
4) Deduza a expressão da capacidade de uma casca esférica isolada de raio r que se encontra inserida num meio de permissividade relativa **E**r.
   Derive the expression of the electric capacity of an isolated spherical shell with radius r that is inserted through a relative permittivity Er.



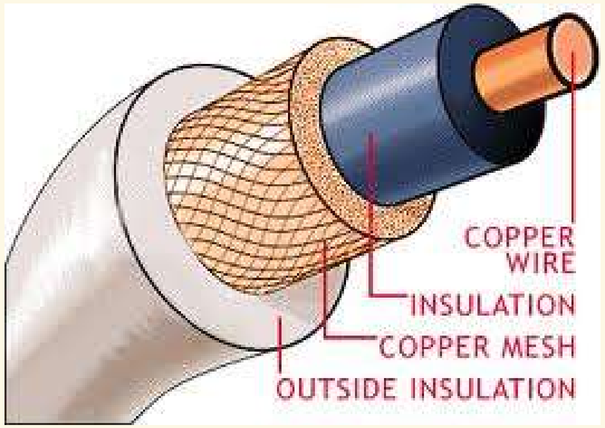
$$d\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}_R}{4\pi\varepsilon R^2} ds$$

4 - POTENCIAL ELÉCTRICO, ENERGIA E CAPACIDADE
ELECTRIC POTENTIAL, ENERGY AND CAPACITY

5) Deduza a expressão da capacidade por metro do cabo coaxial com raio interno, a, e raio externo, b, respectivamente. O dialéctico isolante entre o condutor interno e o externo tem permissividade relativa ε_r.
Find the expression of the capacity per meter of the coaxial cable with inner and outer radius a and b, respectively. The insulating dialectic between the inner conductor and the outer conductor has relative permittivity ε_r.

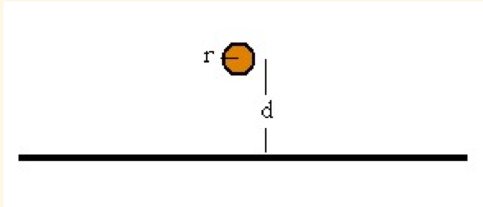


$$\vec{D} = \rho_S \frac{a}{r} \vec{a}_r ; \quad a < r < b$$



6) Encontre a expressão da capacidade por metro entre um condutor rectilíneo de raio r e um plano de massa que distam entre si de d. Para o calculo, considere o diâmetro do condutor muito menor que a distância entre o condutor e o plano de massa. O dialéctico isolante entre o condutor e o plano de massa tem permissividade relativa **E**r.

Find the expression of the capacity per meter of a straight conductor of radius r and a ground plane that are distant from each other d. For the calculation, consider the conductor diameter much smaller than the distance between the conductor and the ground plane. The dialectical insulator between the conductor and the ground plane has relative permittivity Er.



5 - AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E DE POISSON
THE EQUATIONS OF LAPLACE AND POISSON

- Equação de Laplace
  The Laplace equation

$$\nabla^2 V = 0$$

Para a ausência de carga livre, isto é densidade de carga nula, a equação de Laplace permite determinar a função potencial.
In the absence of free charge, i.e. zero charge density, Laplace's equation allows to find the potential function.

- Equação de Poisson
  Poisson equation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Quando a região de interesse contiver uma distribuição de carga qualquer e conhecida, a equação de Poisson permite encontrar a função potencial.
When the region of interest contains any and known free charge, the Poisson equation allows to find the potential function.

5 - AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E DE POISSON
THE EQUATIONS OF LAPLACE AND POISSON

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho$$

$$\nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = \rho$$

para meio homogéneo e isotrópico

for homogeneous and isotropic medium

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

na ausência de carga

in the absence of electrical charge

$$\nabla^2 V = 0$$

5 - AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E DE POISSON
THE EQUATIONS OF LAPLACE AND POISSON

- exercícios....
- exercises....

1) Dois planos condutores A e B estão paralelos entre si e localizados no referencial cartesiano em x=0 e em x=0,2m, respectivamente. O potencial de referência é em x=0,1m. Sabendo que D entre os planos vale 500nC/m^2 segundo o eixo x, calcule o potencial dos planos.

   Two flat conductors A and B are parallel to each other and located on the Cartesian reference x=0 and x=0.2m, respectively. The reference potential is at x = 0.1m. Knowing that the value of D between the planes is 500nC/m^2 along the x axis, find the potential at the plan conductors.

2) Dois discos paralelos distam 10mm entre si e estão a uma diferença de potencial entre eles de 400V. A permissividade relativa do dieléctrico é 4 e a área de cada um dos discos é de 4cm2.

   Two equal parallel discs with area of is 4cm^2 each one are distant from each other of 10mm. The electrical potential difference between them is of 400V. The relative permittivity of the dielectric is 4.

a) Determine a densidade de cargas nos discos.

   Find the charge density on the disks.

b) Determine o módulo da carga eléctrica em cada um dos discos.

   Find the magnitude of the electric charge on each disc.

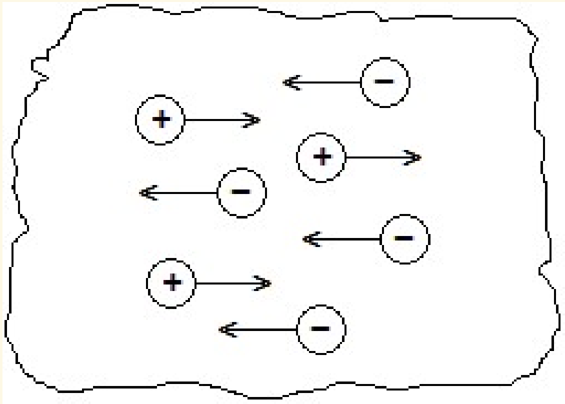
c) Determine a capacidade formada pelos discos.

   Find the capacity formed by the discs.

6 - DENSIDADE DE CORRENTE E CONDUTORES
CURRENT DENSITY AND CONDUCTORS

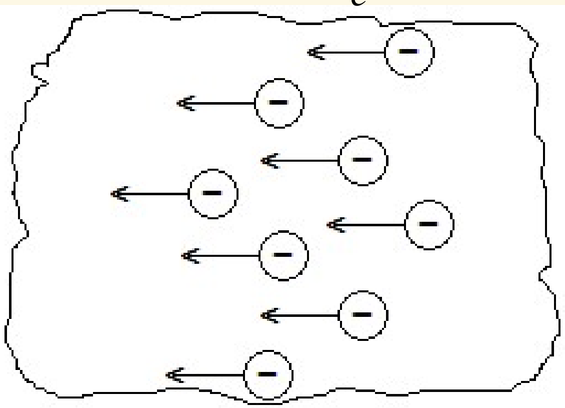
- Condutividade
  Conductivity

$$\sigma = \sigma_{-} + \sigma_{+}$$



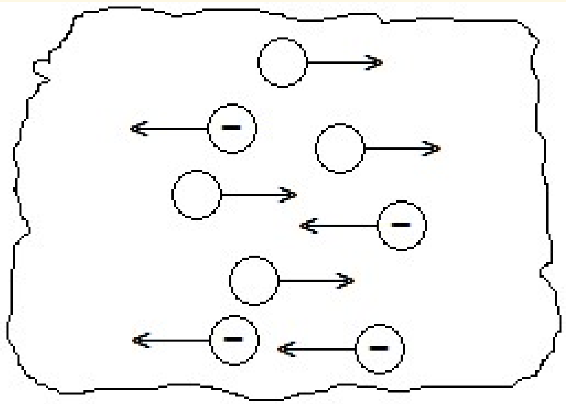
Líquido/Gás
Liquid / Gas

$$\sigma = \sigma_{e}$$



Condutor
Conductor

$$\sigma = \sigma_{e} + \sigma_{h}$$



Semicondutor
Semiconductor

Nos gases e líquidos os portadores de carga são positivos e/ou negativos.
In gases and liquids the charge carriers are positive and/or negative.

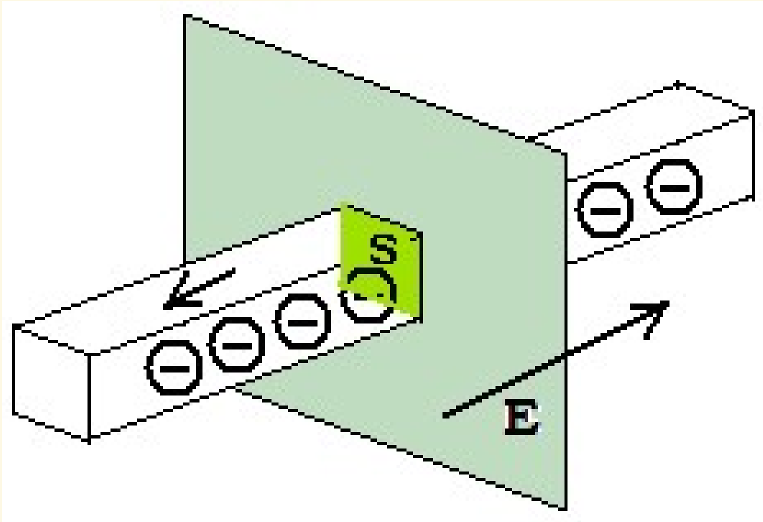
Nos condutores os portadores de carga são electrões, logo são negativos.
In conductors the charge carriers are electrons, so are negative.

Nos semicondutores os portadores de carga são lacunas e electrões.
In semiconductors the charge carriers are electrons and gaps.

6 - DENSIDADE DE CORRENTE E CONDUTORES
CURRENT DENSITY AND CONDUCTORS

- Densidade de corrente
  Current density

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$



- Corrente de condução
  Conduction current

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$\vec{J}\ (A/m^2)$ densidade de corrente
current density

$\sigma\ A/(V\cdot m)$ condutividade
conductivity

$\vec{E}\ (V/m)$ campo eléctrico
electric field

$I\ (A)$ corrente
current

$S\ (m^2)$ superfície
surface

6 - DENSIDADE DE CORRENTE E CONDUTORES
CURRENT DENSITY AND CONDUCTORS

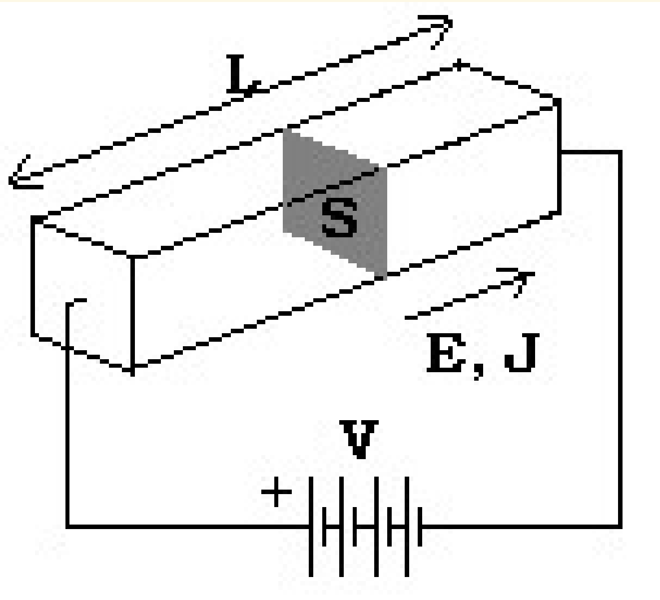
- Resistência
  Resistance

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad E = \frac{V}{L} \qquad R = \frac{V}{I}$$

$$J = \sigma E \qquad I = JS$$

$$\sigma E = \frac{I}{S}$$

$$\frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$



$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

$S \quad (m^2)$ secção
section

$\sigma \quad (\Omega^{-1}\cdot m^{-1})$ condutividade
conductivity

$L \quad (m)$ comprimento
length

$R \quad (\Omega)$ resistência
resistance

6 - DENSIDADE DE CORRENTE E CONDUTORES
CURRENT DENSITY AND CONDUCTORS

- exercícios....
- exercises....

6 - DENSIDADE DE CORRENTE E CONDUTORES
CURRENT DENSITY AND CONDUCTORS

1) Um sólido condutor de forma cilíndrica com raio 10 cm e comprimento 1m apresenta uma resistência de 200 ohm entre a base e o topo.
   A solid cylindrical conductor of radius 10cm and 1m length presents a 200 ohm electrical resistance between the base and the top.

a) Determine a condutividade do material de que é constituído o sólido.
   Find the conductivity of the material which the cylinder is constructed .

b) Determine a secção do cilindro sabendo que este foi esticado e que a resistência passou para o dobro mantendo o volume.
   Find the section of the cylinder knowing that it was extended and in consequence its resistance increased to double. Assume constant volume.

2) Um sólido condutor de secção quadrada de lado 1cm e comprimento 10m é constituído por um material com condutividade 0,1 A/V/m. Sabendo que a este condutor está aplicada uma tenção de 12V determine a densidade de corrente que o atravessa.
   Consider a solid conductor of square section with side of 1cm and length of 10m. It is build of a material with conductivity of 0.1A/V/m. Knowing that the applied a voltage is of 12V, find the current density through the conductor.

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

- Lei de Biot-Sarvat
  Biot-SARVAT's Law
- Lei de Ampere
  Ampere's Law
- Densidade de Corrente
  Current Density
- Densidade de Fluxo Magnético
  Magnetic Flux Density
- Vector Potencial Magnético
  Magnetic Potential Vector
- Teorema de Stocks
  Stocks' Theorem

Um campo magnético tem como origem uma corrente eléctrica.
The magnetic field brought from the electric current.

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

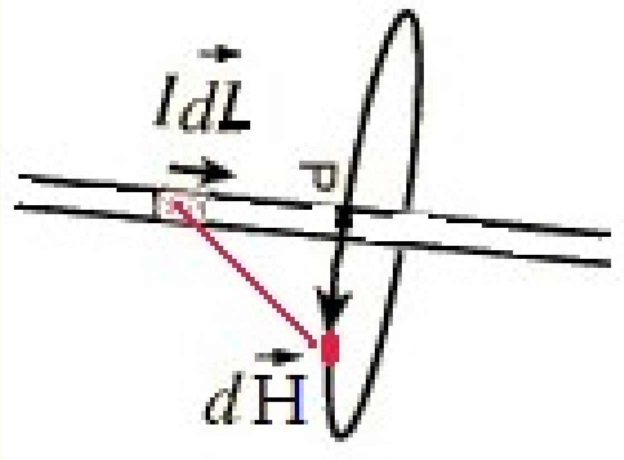
LEI DE BIOT-SARVAT
BIOT-SARVAT'S LAW

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l}}{4\pi R^2} \times \vec{a}_R \quad (A/m)$$

Um elemento infinitesimal de corrente provoca um infinitesimal de campo magnético.

An infinitesimal current element generates an infinitesimal magnetic field.

$$\vec{H} = \oint \frac{I d\vec{l}}{4\pi R^2} \times \vec{a}_R$$



7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO
MAGNETIC FLUX DENSITY

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

O campo magnético H (A/m), num meio linear e isotrópico, provoca a densidade de fluxo magnético B (Tesla, N/A/m) em função da permeabilidade magnética constante do meio.

The magnetic field H (A/m) in a linear and isotropic medium causes the magnetic flux density B (Tesla or N/A/m) as a function of the constant magnetic permeability of the matter.

$$\mu = \mu_o \mu_r$$

A permeabilidade magnética de um meio é o produto da permeabilidade magnética do vazio pela permeabilidade magnética relativa do meio.

The magnetic permeability of the environment is the product of the magnetic permeability of vacuum by the relative magnetic permeability of the matter.

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

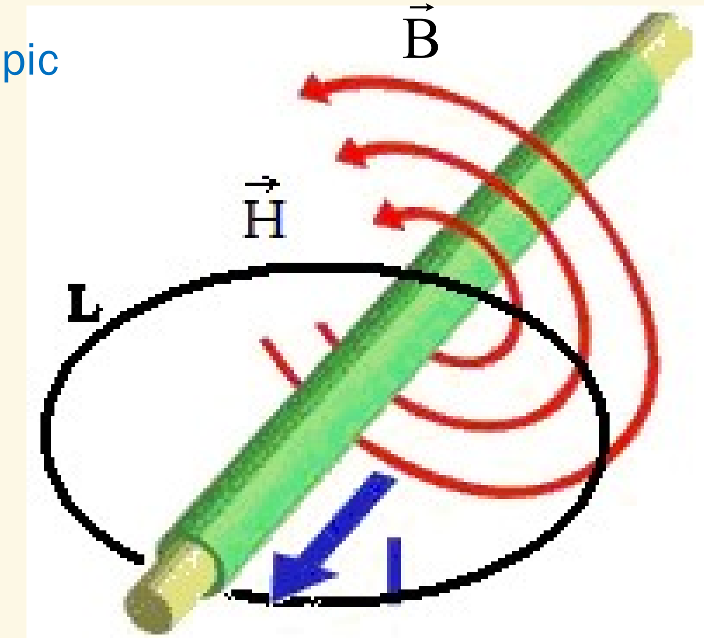
LEI DE AMPERE
AMPERE'S LAW

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{int}$$

Para um meio linear e isotrópico tem-se:

For a linear and isotropic environment comes:

$$\frac{1}{\mu}\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{int}$$



A integral de linha da componente tangencial de H sobre o percurso fechado L é a corrente interior a esse percurso.

The line integral of the tangential component of H on the closed path L is the current within this path.

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

DENSIDADE DE CORRENTE
CURRENT DENSITY

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

O rotacional do campo magnético H é a densidade de corrente J.
The rotational of the magnetic field H is the current density J

POTENCIAL MAGNÉTICO E DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO
MAGNETIC POTENTIAL AND MAGNETIC FLUX DENSITY

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

O rotacional do potencial magnético A é a densidade de fluxo magnético B.
The rotational of the magnetic potential A is the magnetic flux density B.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Como :
Because:

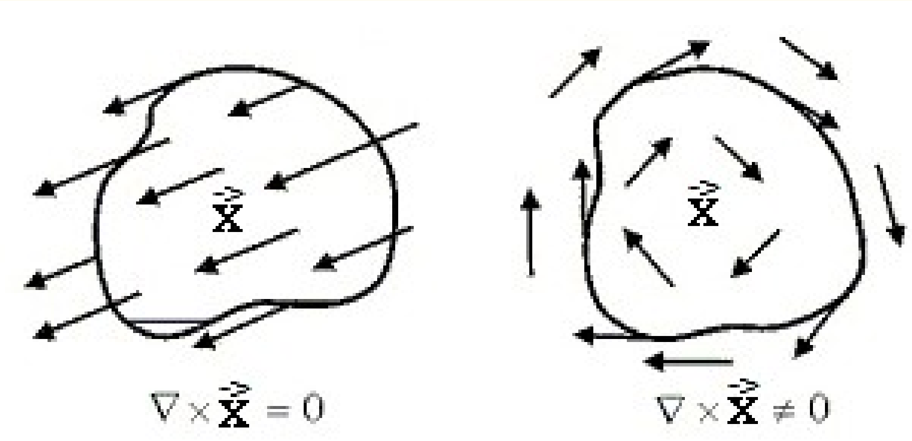
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$$

$$\mu \vec{J} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{a}_x + \nabla^2 A_y \vec{a}_y + \nabla^2 A_z \vec{a}_z$$



7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

TEOREMA DE STOCKS
STOCKS' THEOREM

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi$$

O integral de linha da componente do potencial magnético, A, tangente ao percurso fechado, L, é o integral de superfície da componente da densidade de fluxo magnético, B, perpendicular a superfície, S, interior a L.

The line integral of the magnetic potential component, A, tangential to a closed route, L, is the surface integral of the component of the magnetic flux density, B, perpendicular to the surface S, inside L.

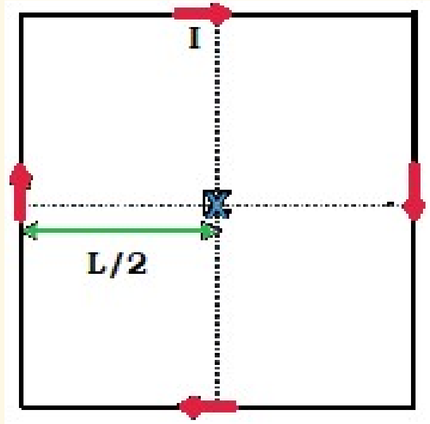
Este facto permite obter o fluxo magnético de duas formas distintas.

This allows to obtain the magnetic flux in two different ways.

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

- exercícios....
- exercises....

1) Considere uma espira quadrada de lado L que se encontra no vazio e que é percorrida por uma corrente I. (Escolha o referencial que considerar adequado.)
   Assume a square loop with side L that is in the vacuum is crossed by a current I. (Select an adequate frame.)



a) Encontre a expressão do campo magnético, H, no centro da espira.
   Find the expression of the magnetic field, H, at the center of the loop.

b) Encontre a expressão da densidade de fluxo magnético, B, no centro da espira.
   Find the expression of the magnetic flux density, B, in the loop center.

7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

2) Considere um condutor rectilíneo infinito de raio *a* que se encontra no vazio e é percorrido por uma corrente constante de intensidade I. (Escolha o referencial que considerar adequado.)
Assume an infinite straight conductor of radius a that lies in the vacuum. The intensity of current, I, through conductor is constant. (Choose one appropriate frame.)

a) Encontre a expressão do campo magnético, H, gerado pela corrente que atravessa o condutor à distância de 10Cm do condutor.
Find the expression of the magnetic field H generated by the current through the conductor at a distance of 10cm from the conductor.

b) Encontre a expressão geral da densidade de fluxo magnético, B, gerada pela corrente que atravessa o condutor à distância R do condutor.
Find the expression of the magnetic flux density, B, generated by the current through the conductor at a distance R from the conductor.

3) Considere um campo magnético cuja função vector potencial magnético no referencial cartesiano é o apresentado na equação ao lado.
Assume a magnetic field whose magnetic vector potential function in the Cartesian reference frame is the presented in equation at left.

$$\vec{A} = y\cos(2x)\vec{a}_x + (3y + e^x)\vec{a}_z$$

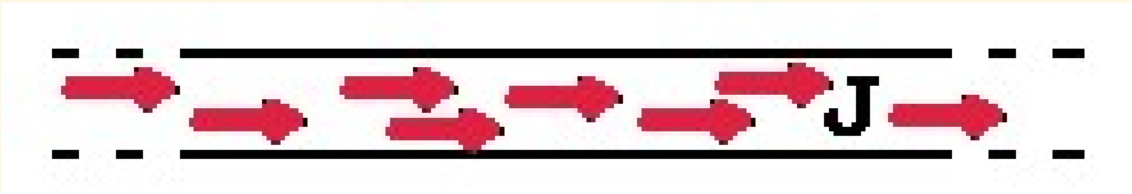
a) Encontre a expressão do campo magnético, H, e da densidade de fluxo magnético, B.
Find the expression of the magnetic field, H, and the magnetic flux density, B.

b) Encontre H e B no ponto (1,0,3) .
Find H and, B, at the point (1,0,3).

c) Encontre a expressão da densidade de corrente J responsável pelo campo.
Find the expression of the current density, J, related to the field.

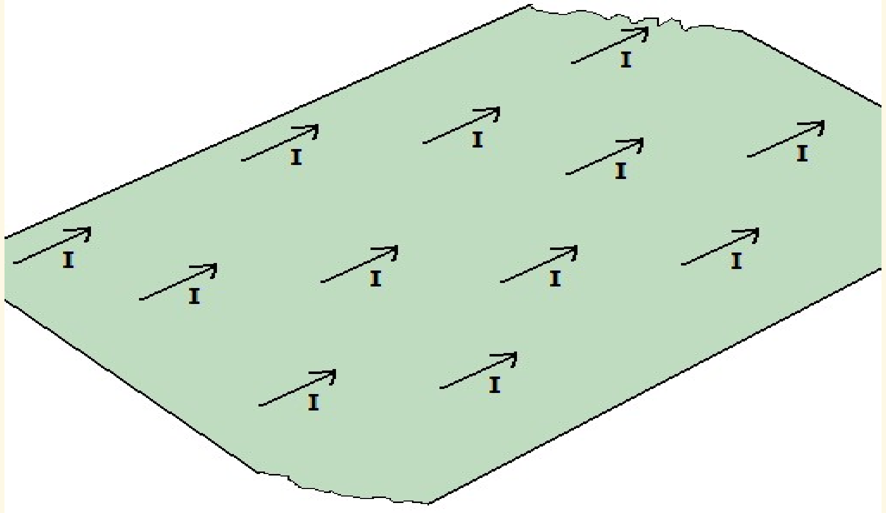
7 - LEI DE AMPERE E O CAMPO MAGNÉTICO
AMPERE'S LAW AND THE MAGNETIC FIELD

4) Considere uma região cilíndrica do espaço com raio a que se encontra no vazio e é percorrida por uma corrente de densidade J. Encontre a expressão do campo magnético, H, e da densidade de fluxo magnético, B, gerados pelo condutor. (Escolha o referencial que considerar adequado.)
Assume an cylindrical region with radius a which is in the vacuum. It is crossed by a current density J. Find the expression of the magnetic field, H, and of the magnetic flux density, B, generated by the density of current J.(Choose one appropriate frame.)



5) Considere uma película plana infinita, que se encontra no vazio percorrida por uma corrente de densidade K. Encontre a expressão do campo magnético, H, e da densidade de fluxo magnético, B, gerados pela película. (Escolha o referencial que considerar adequado.)

   Assume an infinite flat film in vacuum where flows a current density K. Find the expression of the magnetic field H and the magnetic flux density, B, generated by the film. (Choose one appropriate frame.)



6) Um campo magnético dado pela expressão ao lado propaga-se no vazio.
A magnetic field given by the expression on the left side propagates in a vacuum.

$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{r}} \cos(\phi) \vec{a}_r$$

a) Encontre a expressão da densidade de fluxo magnético.
Find the expression of the magnetic flux density.

b) Encontre o fluxo magnético que atravessa a superfície indicada.
Find the magnetic flux through the area indicated at left.

$$\begin{cases} -1 < z < 1 \\ -\pi/4 < \phi < \pi/4 \end{cases}$$

---

7) Considere uma película que se encontra no plano xy na qual circula uma corrente com densidade K segundo x positivo. Encontre a expressão do potencial magnético, A.
Consider a film that lies in the xy plane in which is circulating a current with density K oriented along the positive x. Find the expression of the magnetic potential A.

8 - FORÇAS E TORQUES EM CAMPOS MAGNÉTICOS
FORCES AND TORQUES IN MAGNETIC FIELDS

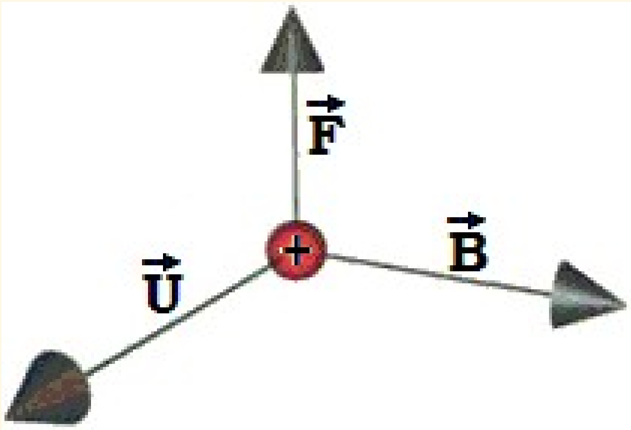
- Forças magnéticas sobre partículas
  Magnetic forces on particles
- Combinação de campos eléctrico e magmático
  Combination of electric fields and magmatic fields
- Força magnética sobre um elemento de corrente
  Magnetic force on a current element
- Forças em circuitos magnético
  Forces in magnetic circuits
- Momento magnético
  Magnetic moment

8 - FORÇAS MAGNÉTICAS SOBRE PARTÍCULAS
MAGNETIC FORCES ON PARTICLES

$$\vec{F} = Q\vec{U} \times \vec{B}$$

Uma partícula electricamente carregada quando em movimento na presença de uma densidade de fluxo magnético B fica sujeita a uma força perpendicular à sua velocidade a B.

One particle electrically charged when in movement in the presence of a magnetic flux density B is under a force perpendicular to the velocity and to B.



8 - COMBINAÇÃO DE CAMPOS ELÉCTRICO A MAGMÁTICO
COMBINATION OF ELECTRIC FIELDS AND MAGMATIC FIELDS

Na presença de um campo magnético e eléctrico as forças sobrepõem-se.

In the presence of a magnetic field and of a electric field the forces overlaps.

$$\vec{F}_m = Q\vec{U} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e$$

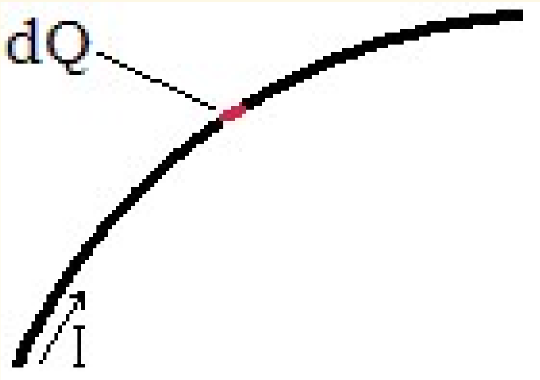
$$\vec{F} = Q(\vec{U} \times \vec{B} + \vec{E})$$

8 - FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UM ELEMENTO DE CORRENTE
MAGNETIC FORCE ON A CURRENT ELEMENT

$$\vec{F} = Q\vec{U} \times \vec{B} \qquad I = \frac{dQ}{dt} \qquad \vec{U} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$d\vec{F} = dQ(\vec{U} \times \vec{B})$$

$$d\vec{F} = Idt(\vec{U} \times \vec{B})$$



$$d\vec{F} = I(\vec{U}dt) \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

8 - FORÇAS EM CIRCUITOS MAGNETICOS
FORCES IN MAGNETIC CIRCUITS

Trabalho realizado ao longo de um percurso L por uma força F.
The work produced along one trajectory L by one force F.

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dW = F dl$$

Energia armazenada no volume V em que B é linear em relação a H.
Energy stored in a volume V when B is linear with respect to H.

$$W_B = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dv$$

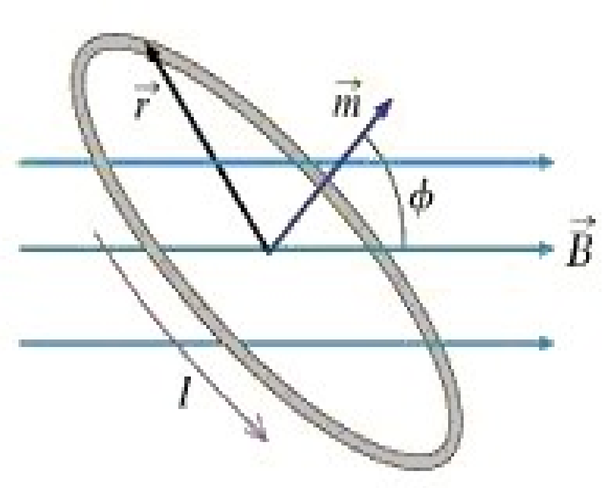
$$dv = S dl$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S dl$$

$$F dl = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S dl$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S$$

8 - MOMENTO MAGNÉTICO
MAGNETIC MOMENT



O momento magnético, m, de N espiras planas e colineares percorridas por uma corrente I depende da magnitude da área S delimitada pelas espiras e não da forma.

The magnetic moment, m, formed by a coil with N planar turns crossed by a current I depends on the magnitude of the area, S, enclosed by the coil and does not of the form of the coil.

$$\vec{m} = NIS\vec{a}_n$$

O torque, T, resultante sobre uma bobine planar de momento magnético m na presença de uma densidade de fluxo magnético, B, é obtido pelo produto vectorial de m por B.

The torque, T, resulting on one planar coil of magnetic moment m in the presence of a magnetic flux density, B, is calculated by the cross vector product of m and B.

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

8 - FORÇAS E TORQUES EM CAMPOS MAGNÉTICOS
FORCES AND TORQUES IN MAGNETIC FIELDS

- exercícios....
- exercises....

8 - FORÇAS E TORQUES EM CAMPOS MAGNÉTICOS

FORCES AND TORQUES IN MAGNETIC FIELDS

1) Uma carga eléctrica considerada pontual de 1mC encontra-se no vazio e está animada com a velocidade de $3u_x$ m/s. O campo magmático na região é de $100u_y$ A/m. Determine o vector força que actua sobre a carga por acção do campo.
   One point electrical charge of 1mC is under the vacuum and is animated with a speed of $3u_x$ m/s. The magmatic field in the region is of $100u_y$ A/m. Find the vector force acting on the electrical charge by the action of the field.

2) Considere uma zona do espaço onde está definido um referencial cartesiano no qual coexistem dois campos. Um deles é um campo magnético dado por $5u_x+4u_y-3u_z$ (A/m) e outro é um campo eléctrico dado por $200u_x-150u_y+280u_z$ (V/m). Diga se aseguinte afirmação é verdadeira ou falsa: **"Para o cálculo da acção conjunta dos dois campos sobre uma partícula carregada que se encontra em movimento é válido o teorema da sobreposição."**
   Consider a region of space where it is defined a Cartesian frame in which two fields coexist. One is a magnetic field given by 5ux +4uy-3uz (A/m) and the other is an electric field given by 200ux-150uy + 280uz (V/m). Say whether the following statement is true or false: **"For the calculation of the action of the two fields on a electrical charged particle in motion the superposition theorem is valid."**

3) Um condutor de comprimento 2m está localizado segundo o eixo-z no vazio e na presença de um campo magnético de 500A/m segundo o eixo-x.
   One conductor of length 2m is located along the z-axis in the vacuum and in the presence of a magnetic field of 500A/m along the x-axis.

a) Encontre a expressão da força exercida sobre o condutor em função da corrente que o atravessa.
   Find the expression of the force on the conductor due to the current.

b) Qual a força exercida sobre o condutor sabendo que a corrente que o atravessa é de 25A?
   What is the force exerted on the conductor knowing that the current is 25A?

4) Dois condutores longos rectilíneos e paralelos são percorridos por uma corrente I. Estão no vazio e distam entre si de R, tendo as correntes que os percorrem a mesma direcção e sentido. (responda em função do referencial que adoptar)

Two straight long and parallel conductors in the vacuum spaced from a distance R are crossed by a current, I. The two currents have the same direction of circulation. (answer in terms of the reference to be adopted)

a) Encontre a expressão da densidade de fluxo magnético gerado por cada um dos condutores à distância R.

Find the expression of the magnetic flux density generated by each one of the conductors at a distance R.

b) Encontre a expressão da força por unidade de comprimento exercida sobre cada um dos condutores.

Find the expression of the force per unit of length applied on each conductor.

c) Qual a força resultante sobre 10m de condutor sabendo que a corrente que os atravessa é de 20A e que estes estão distanciados de 0,1mm?

What is the resulting force on 10m of the conductor knowing that the current through them is 20A, and that they are spaced by 0.1mm?

5) O campo magnético no entre-ferro de ar de um circuito magnético de secção $25cm^2$ é de 6000A/m. Determine a força de atracção entre as faces do entre-ferro perpendiculares ao fluxo.

The magnetic field in the air-gap of a iron circuit with section of $25cm^2$ is 6000 A/m. Find the attraction force between the faces of the air-gap perpendicular to the magnetic flux.

6) Uma espira rectangular encontra-se no plano xoy com o seu centro em (0,0,0). A espira que se encontra no vazio mede 10cm segundo o eixo-x e 8cm segundo o eixo-y. A densidade de fluxo magnético na região da espira é de 5mT segundo o eixo-y.

A rectangular loop is in xoy plane with its center at (0,0,0). The loop is in the vacuum and have10cm along x-axis and 8cm along y-axis. The magnetic flux density in the coil region is 5mT according to the y-axis.

a) Qual o troque exercido sobre a espira em relação ao eixo-x?

What is the torque over the loop around the x-axis?

b) Qual o troque exercido sobre a espira em relação ao eixo-y?

What is the torque over the loop around the y-axis?

c) Qual o troque exercido sobre a espira em relação ao eixo-z?

What is the torque over the loop around the z-axis?

9 - INDUTÂNCIA E CIRCUITOS MAGNÉTICOS LINEARES
INDUCTANCE AND LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

- Indutores e indutância
  Inductors and inductance
- Tensão de auto-indução
  Voltage of auto-induction
- Lei de ampere em circuitos magnéticos e relutância
  Ampere's law in magnetic circuits and reluctance
- Analogia entre circuitos magnéticos e eléctricos.
  Analogy between magnetic circuits and electric circuits.
- Circuitos magnéticos lineares
  Linear magnetic circuits

  Circuitos magnéticos simples
  Simple magnetic circuits

  Circuitos magnéticos com entre-ferro
  Iron cores with air-gap

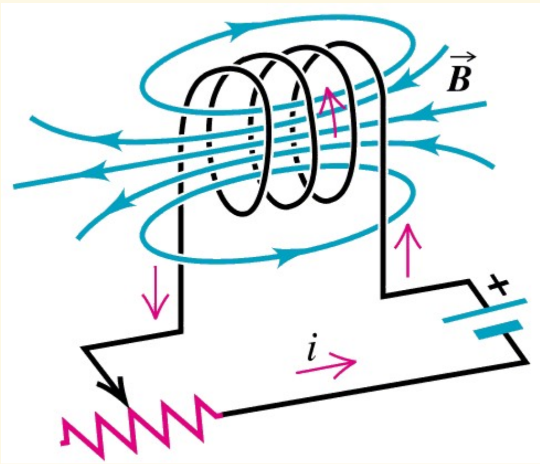
  Circuitos magnéticos mistos
  Mixed magnetic circuits

9 - INDUTÂNCIA E CIRCUITOS MAGNÉTICOS LINEARES
INDUCTANCE AND LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

INDUTORES E INDUTÂNCIA
INDUCTORS AND INDUCTANCE

$$L = \frac{\lambda}{I}$$

$$\lambda = \begin{cases} N\phi & \text{bobinas / coils} \\ \phi & \text{outras configurações / other settings} \end{cases}$$



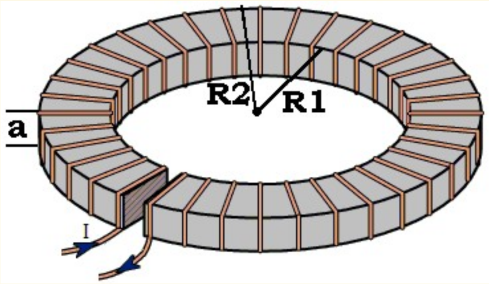
A indutância magnética é a razão entre o fluxo magnético enlaçado e a intensidade de corrente eléctrica que o gera.

The magnetic inductance is the ratio between the looped magnetic flux and the intensity of electric current that generates it.

9 - INDUTÂNCIA E CIRCUITOS MAGNÉTICOS LINEARES
INDUCTANCE AND LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

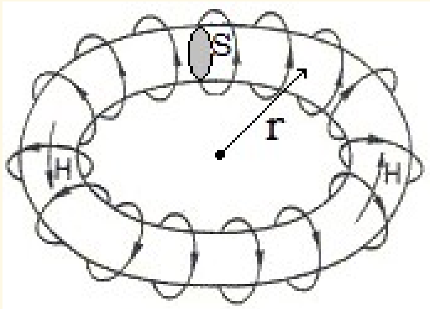
INDUTORES E INDUTÂNCIA
INDUCTORS AND INDUCTANCE

Toróide de secção quadra
Toroid with square core



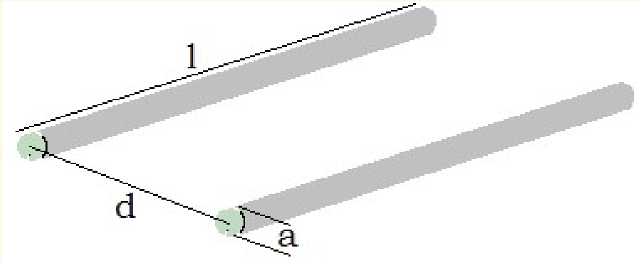
$$L = \frac{\mu N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Toróide de secção circular
Toroid of circular core



$$L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi\ r}$$

Condutores paralelos
Parallel conductors



$$L = l\,\frac{\mu}{\pi}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{d}{2a}\right)$$

9 - INDUTÂNCIA E CIRCUITOS MAGNÉTICOS LINEARES
INDUCTANCE AND LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

TENSÃO DE AUTO-INDUÇÃO
VOLTAGE OF AUTO-INDUCTION

Lei de Faraday

Faraday's Law

$$V = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad L = N\frac{d\phi}{di}$$

$$V = -L\frac{di}{dt}$$

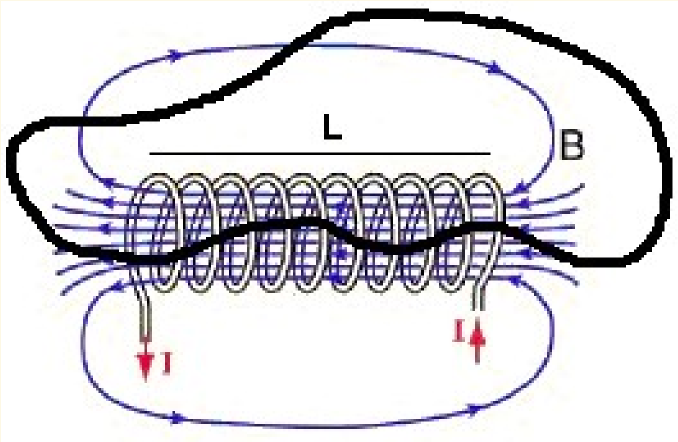
9 - INDUTÂNCIA E CIRCUITOS MAGNÉTICOS LINEARES
INDUCTANCE AND LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

LEI DE AMPERE EM CIRCUITOS MAGNÉTICOS E RELUTÂNCIA
AMPERE'S LAW IN MAGNETIC CIRCUITS AND RELUTANCE

Lei de Ampere e Relutância

Ampere's law and relutance

$$\oint \vec{\mathrm{H}} \cdot d\vec{\mathrm{l}} = \mathrm{I}_{int}$$



Relutância magnética

Magnetic Reluctance

$$R = \frac{l}{\mu A}$$

Como no exterior da bobina as linhas de campo são muito dispersas H é diminuto. Considerando um qualquer caminho fechado contendo todo o núcleo da bobina e aplicando a lei de Ampere surge: $\mathrm{H}l \cong \mathrm{NI}$

Because in the outside of the coil the field lines are very scattered H is small. Whereas any closed path containing all the core and applying Ampere's law comes: $\mathrm{H}l \cong \mathrm{NI}$

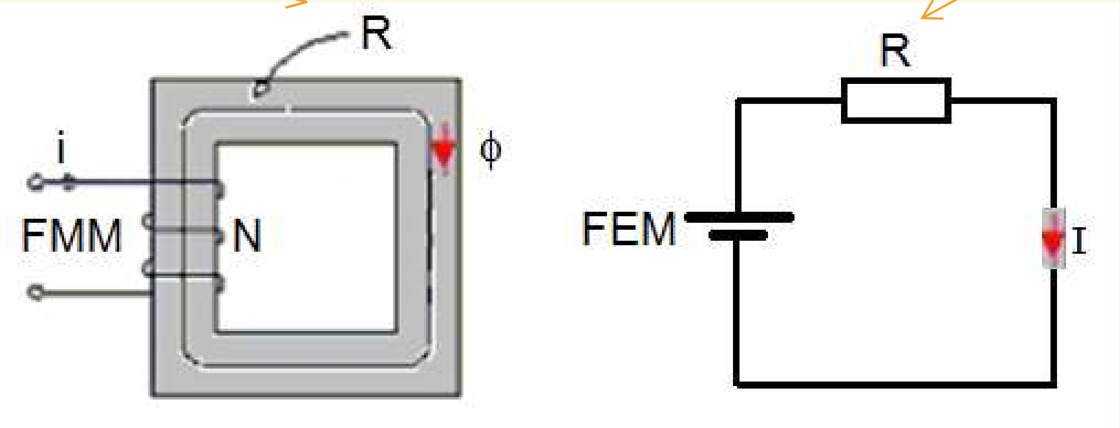
$$\begin{cases} \mathrm{H}l = \mathrm{NI} \\ \mathrm{B} = \mu \mathrm{H} \\ \mathrm{BA} = \phi \end{cases} \rightarrow \frac{l}{\mu A}\phi = \mathrm{NI} \qquad R = \frac{l}{\mu A}$$

$$R\phi = \mathrm{NI}$$

ANALOGIA ENTRE CIRCUITO MAGNÉTICO E CIRCUITO ELÉCTRICO
MAGNETIC CIRCUIT AND ELECTRIC CIRCUIT ANALOGY

$$R = \frac{l}{\mu A}$$

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$



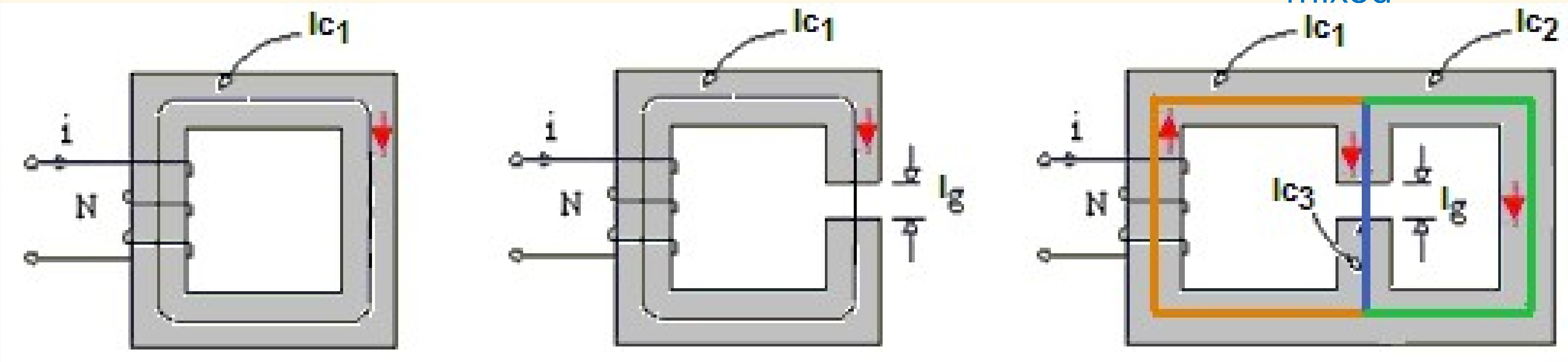
$$FMM = NI$$

$$FMM = R\,\phi$$

$$FEM = RI$$

CIRCUITOS MAGNÉTICOS
MAGNETIC CIRCUITS

misto
mixed



simples
simple

$$R_1 \phi = NI$$

$$R_1 = \frac{lc_1}{\mu_R \mu_o A}$$

com entre-ferro
with air-gap

$$NI = (R_1 + R_g)\phi$$

$$R_1 = \frac{l_{C1} - l_g}{\mu_R \mu_0 A}$$

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 A}$$

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$NI = R_1\phi_1 + R_2\phi_2$$

$$R_2\phi_2 = (R_3 + R_g)\phi_3$$

$$R_1 = \frac{l_{C1}}{\mu_R \mu_0 A}$$

$$R_2 = \frac{l_{C2}}{\mu_R \mu_0 A}$$

$$R_3 = \frac{l_{C3} - l_g}{\mu_R \mu_0 A}$$

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 A}$$

- exercícios….
  exercises….

1) Calcule a tensão aos terminais de uma bobina com indutância 100mH percorrida por uma corrente, i, nas seguintes condições:
   Find the voltage at the terminals of a coil with inductance 100mH where flows the current, i, in the next two conditions:

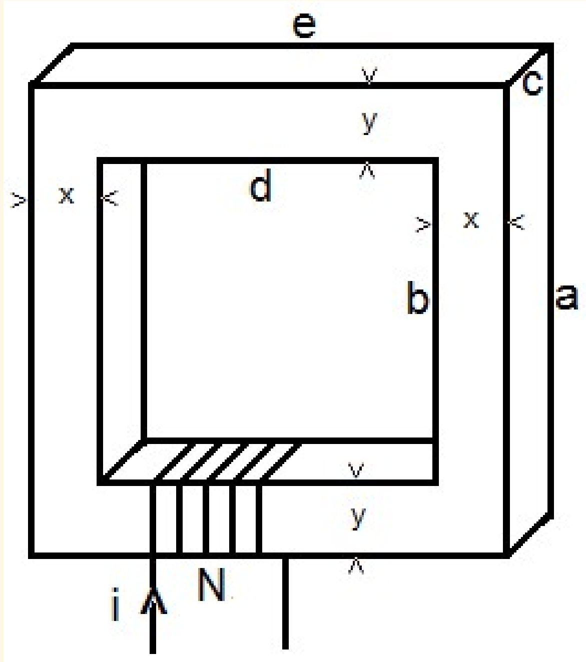
a) $i=20\sin(314t)$ (SI)
b) $i=5$ A

---

2) Calcule a indutância de uma bobina de 250 espiras com núcleo de aço de secção $2cm^2$ e comprimento 15cm que se encontra a funcionar na zona linear ($\mu_R=10$).
   Find the inductance of a coil with 250 turns, steel core, section of $2cm^2$ and 15cm length that is operating in the linear zone.

3) Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. Sabendo que este se encontra a funcionar na zona linear e que a permeabilidade magnética relativa do material constituinte do núcleo é 8, determine:

a) o circuito eléctrico equivalente;
b) o fluxo magnético no núcleo;
c) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento ;
d) o campo magnético no interior do enrolamento ;
e) a indutância vista aos terminais do enrolamento;
f) a corrente que percorre o enrolamento para uma tensão aplicada de 230V/50Hz.

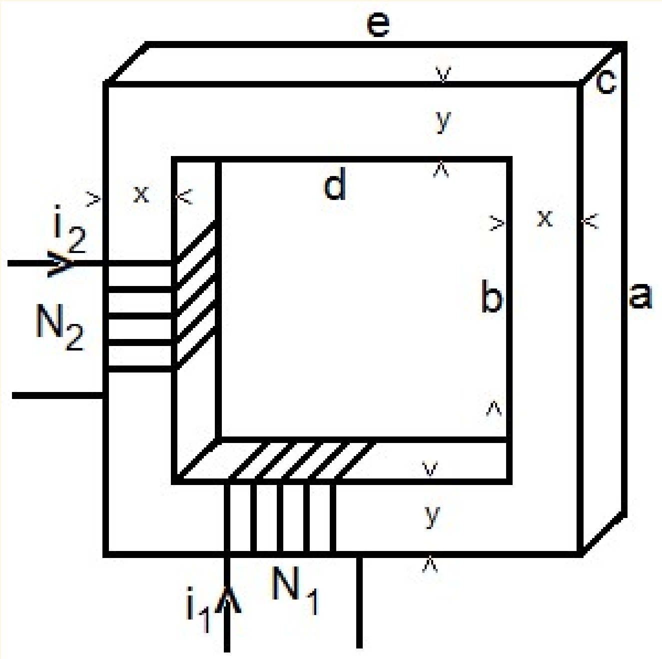


a=12cm b=8cm c=3cm
d=7cm e=15cm

i=2A N=5000

4) Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. Sabendo que este se encontra a funcionar na zona linear e que a permeabilidade magnética relativa do material constituinte do núcleo é 8, determine:

a) o circuito eléctrico equivalente;
b) o fluxo magnético no núcleo;
c) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_1;
d) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_2;
e) o campo magnético no interior do enrolamento N_1;
f) o campo magnético no interior do enrolamento N_2.

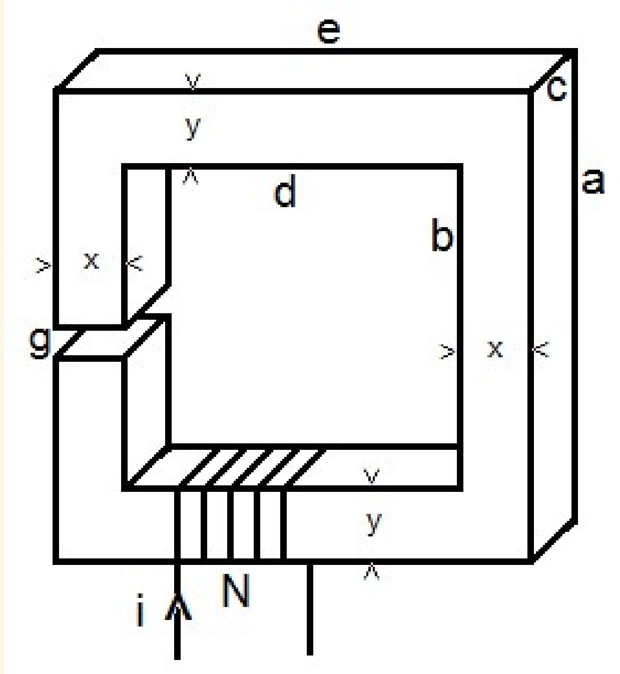


a=12cm b=8cm c=3cm
d=7cm e=15cm

i_1=2A N_1=5000
i_2=5A N_2=1000

5) Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. Sabendo que este se encontra a funcionar na zona linear e que a permeabilidade magnética relativa do material constituinte do núcleo é 8, determine:

a) o circuito eléctrico equivalente;
b) o fluxo magnético no núcleo;
c) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento ;
d) o campo magnético no interior do enrolamento ;
e) a indutância vista aos terminais do enrolamento;
f) a corrente que percorre o enrolamento para uma tensão aplicada de 230V/50Hz.

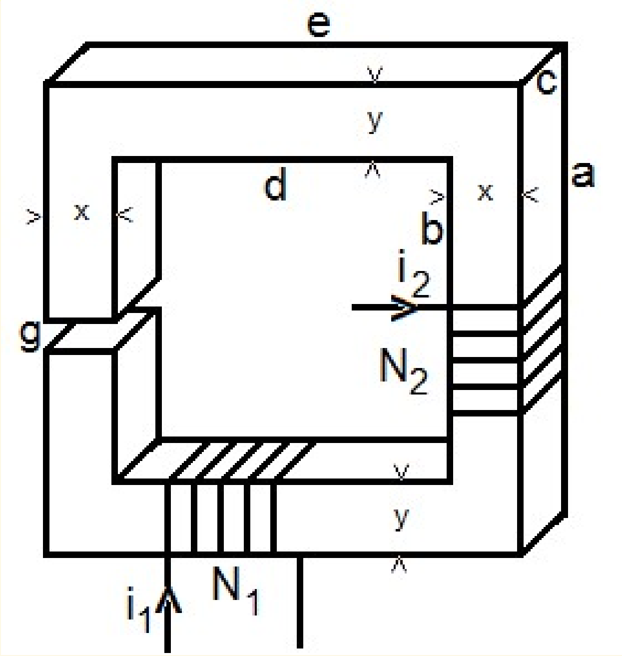


a=12cm b=8cm c=3cm
d=7cm e=15cm g=2mm

i=2A N=5000

6) Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. Sabendo que este se encontra a funcionar na zona linear e que a permeabilidade magnética relativa do material constituinte do núcleo é 8, determine:

a) o circuito eléctrico equivalente;
b) o fluxo magnético no núcleo;
c) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_1;
d) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_2;
e) o campo magnético no interior do enrolamento N_1;
f) o campo magnético no interior do enrolamento N_2.

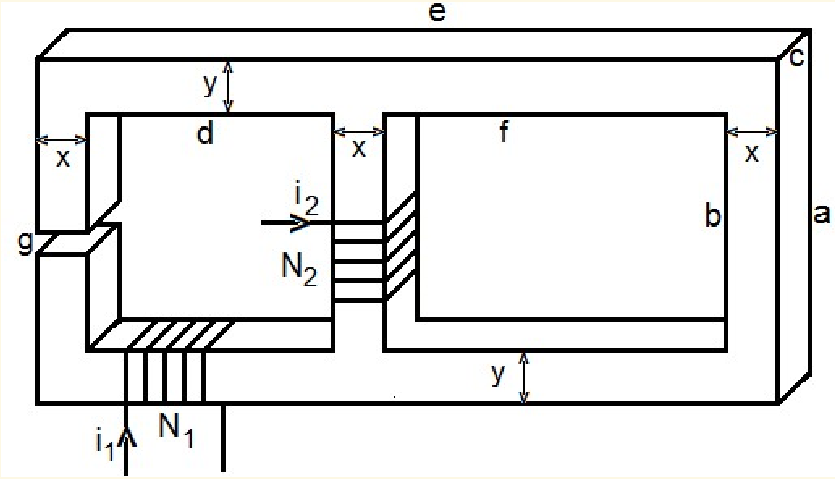


a=12cm	b=8cm	c=3cm
d=7cm	e=15cm	

i_1=2A N_1=5000
i_2=5A N_2=1000

7) Considere o circuito magnético apresentado na figura abaixo. Sabendo que este se encontra a funcionar na zona linear e que a permeabilidade magnética relativa do material constituinte do núcleo é 8, determine:

   a) o circuito eléctrico equivalente;
   b) o fluxo magnético no interior do enrolamento N_1;
   c) o fluxo magnético no interior do enrolamento N_2;
   d) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_1;
   e) a densidade de fluxo magnético no interior do enrolamento N_2;
   f) o campo magnético no interior do enrolamento N_1;
   g) o campo magnético no interior do enrolamento N_2.



$a=20cm$ $b=8cm$ $c=3cm$ $d=5cm$ $e=30cm$ $f=10cm$ $g=2mm$

$i_1=2A$ $N_1=5000$ $i_2=5A$ $N_2=1000$

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINEARES E INDUTÂNCIA

NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

- Não linearidade da curva de magnetização B-H

  Nonlinearity of the magnetization curve B-H

- Circuitos magnéticos simples e simétricos

  Simple and symmetric magnetic circuits

- Indutância em circuitos magnéticos saturados

  Inductance in saturated magnetic circuits

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINIARES E INDUTÂNCIA

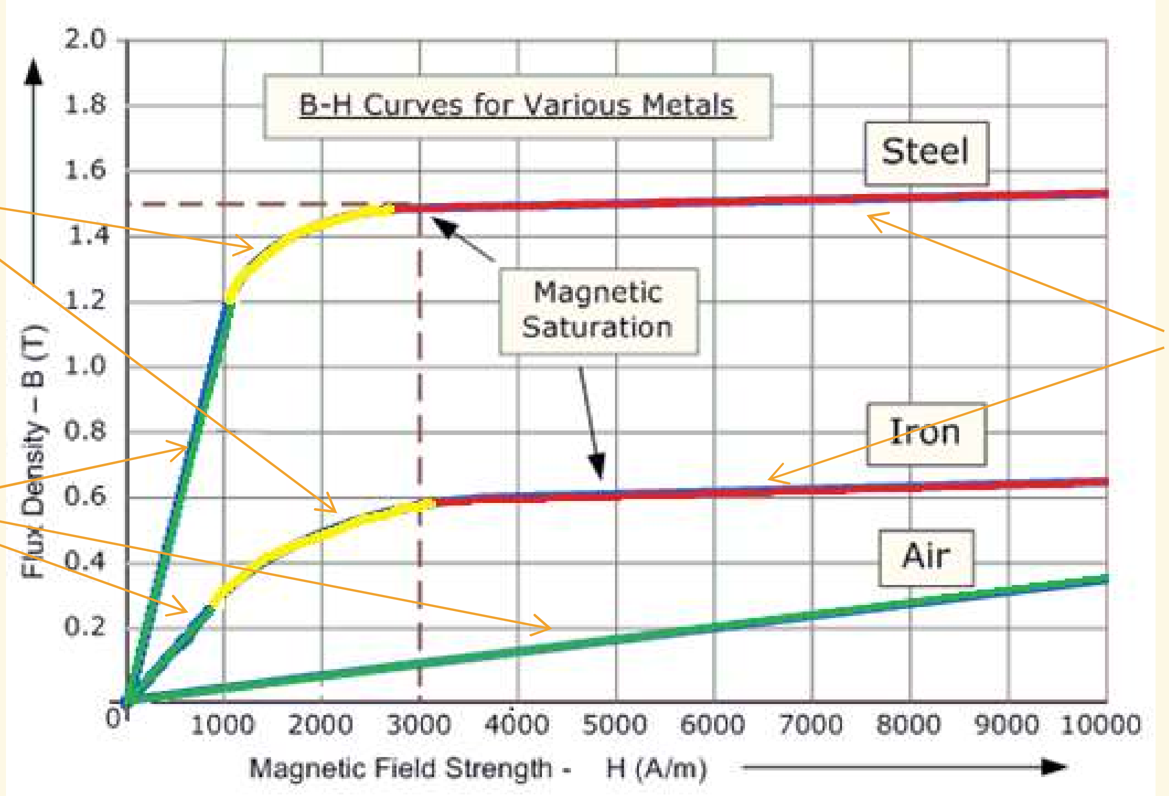
NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

$$B = f(H)$$

A relação entre B e H pode ser definida na forma analítica, gráfica ou por tabela.

$$\mu = \frac{B}{H} \neq Const.$$

$$\mu = \frac{B}{H} = Const.$$



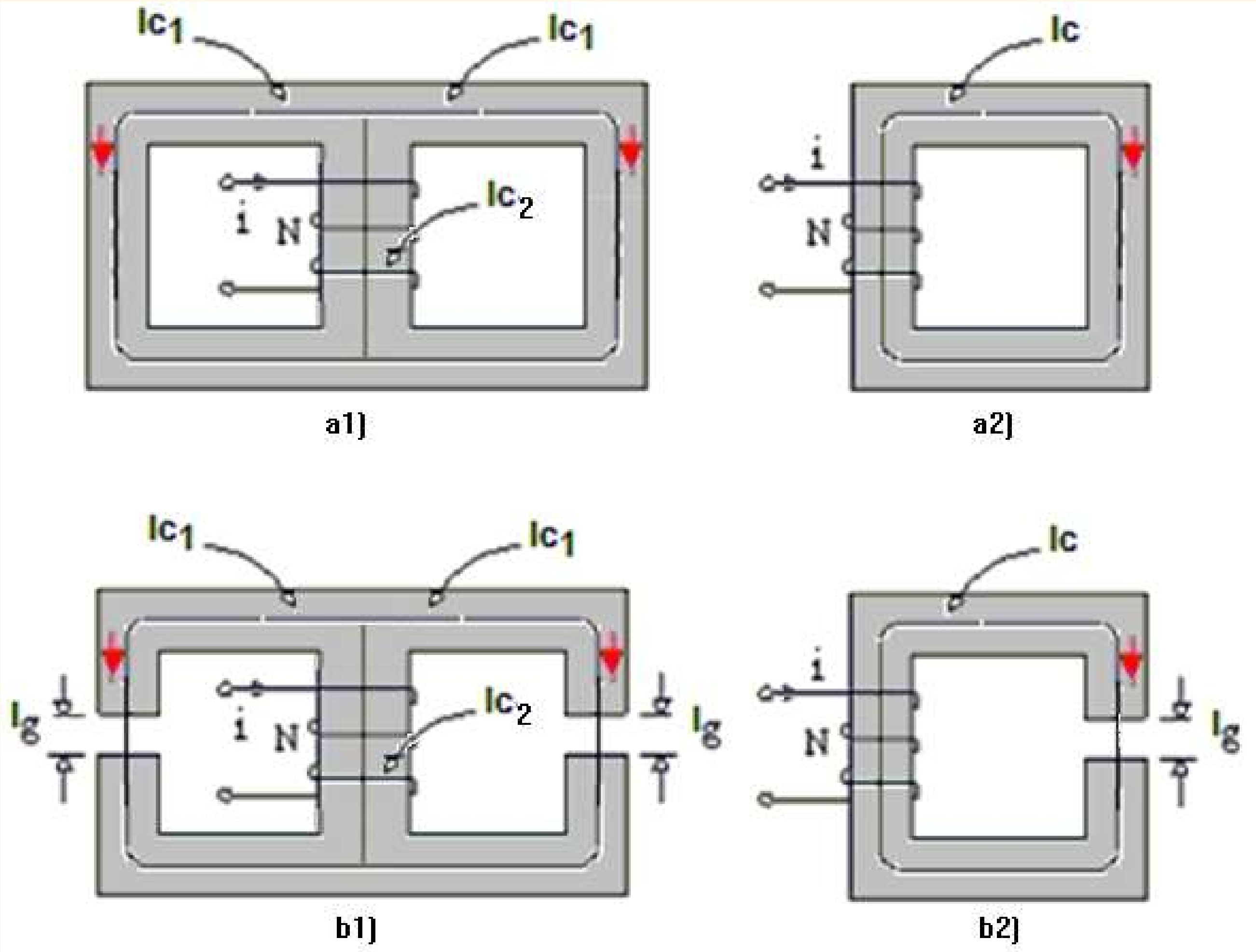
$$\begin{cases} B \cong Const. \\ \mu = B/H \neq Const. \end{cases}$$

Nas zonas indicadas a verde a curva de magnetização, B=*f*(H), é rectilínea. Quando o ponto de funcionamento do circuito magnético se encontra nestas zonas o circuito é considerado em funcionamento linear.

Nas zonas indicadas a amarelo e a vermelho a curva de magnetização , B=*f*(H), não é rectilínea. Quando o ponto de funcionamento do circuito magnético se encontra nestas zonas o circuito é considerado em funcionamento não linear.

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINIARES E INDUTÂNCIA
NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

SIMPLIFICAÇÃO DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS
SIMPLIFICATION OF NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS



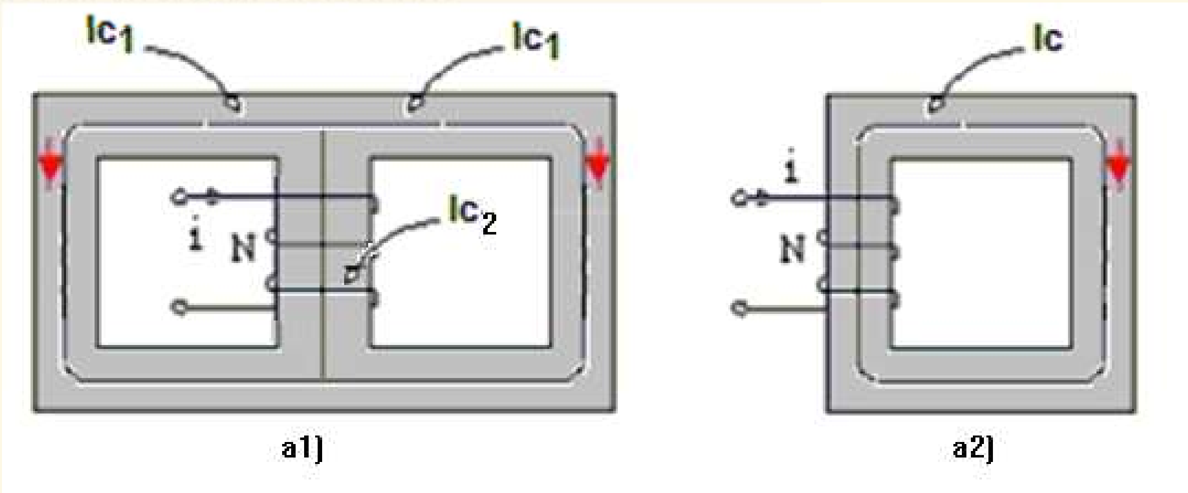
A relutância equivalente do paralelo de N relutâncias **iguais**, mesmo que não lineares, é a N parte da relutância individual.

A simetria de circuitos magnéticos, mesmo que não lineares, permite a sua redução a circuitos magnéticos simples.

Os circuitos a1) e b1) são simplificáveis nos circuitos a2) e b2), respectivamente. É de salientar a simetria e que a secção da coluna central é igual à soma das secções das colunas laterais.

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINIARES E INDUTÂNCIA
NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

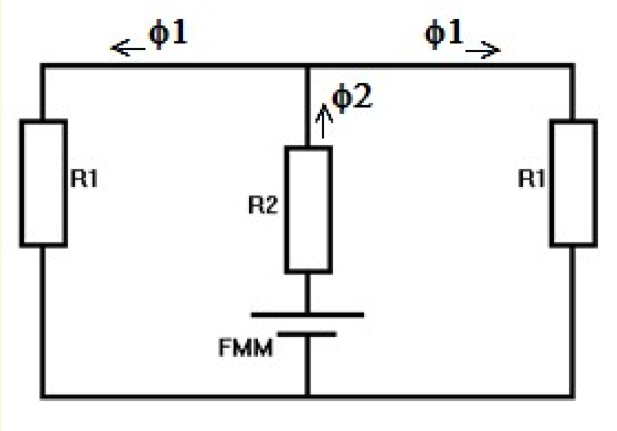
SIMPLIFICAÇÃO DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS
SIMPLIFICATION OF NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

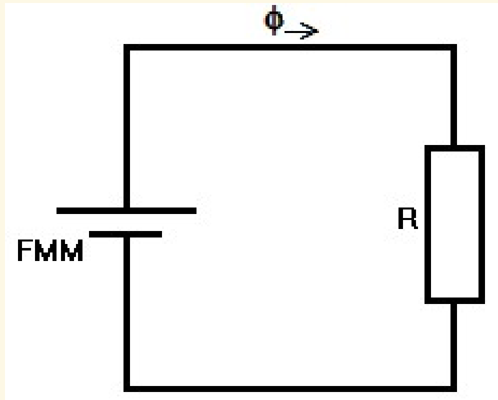


$$\phi_2 = 2\phi_1 \qquad A_2 = 2A_1$$

como $\begin{cases} B_2 A_2 = \phi_2 \\ B_1 A_1 = \phi_1 \end{cases}$

logo $B_2 = B_1$





$$R = R_2 + \frac{R_1}{2}$$

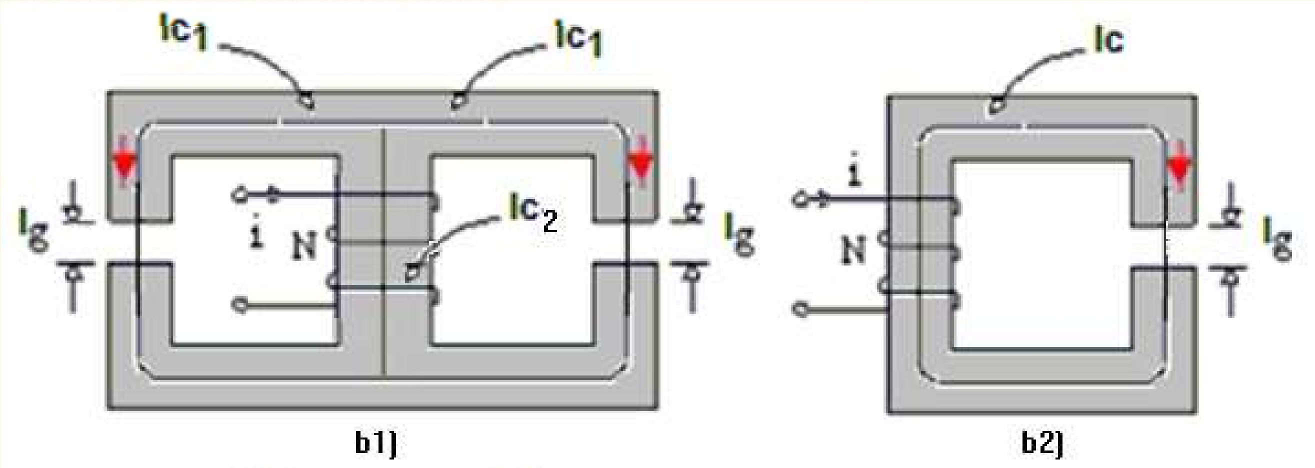
$$FMM = R\,\phi$$

Como B1=B2, o estado de magnetização, saturação ou não, nas colunas laterais e na coluna central são iguais. Isto é, todo o material do circuito magnético se encontra no mesmo estado de magnetização.

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINIARES E INDUTÂNCIA

NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

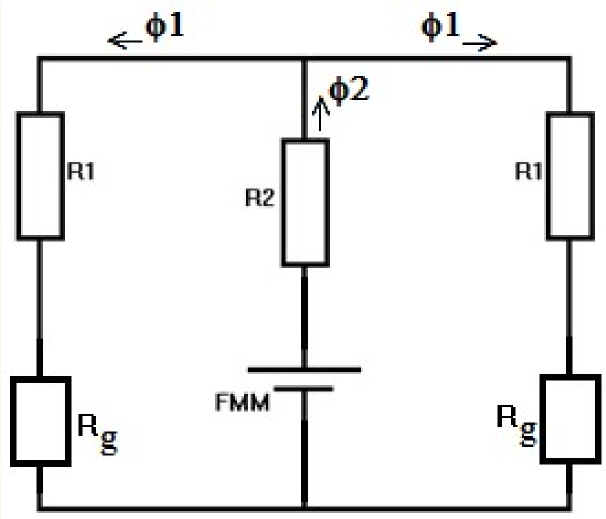
SIMPLIFICAÇÃO DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS
SIMPLIFICATION OF NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS

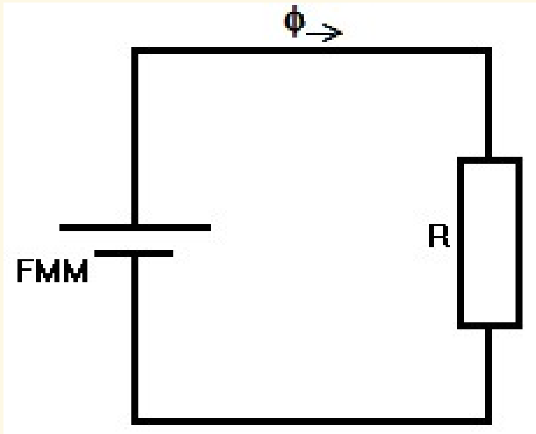


$\phi_2 = 2\phi_1 \qquad \mathrm{A}_2 = 2\,\mathrm{A}_1$

como $\begin{cases} B_2\,\mathrm{A}_2 = \phi_2 \\ B_1\,\mathrm{A}_1 = \phi_1 \end{cases}$

logo $\quad B_2 = B_1$





$$R = R_2 + \frac{R_1 + Rg}{2}$$

$$\mathrm{FMM} = \mathrm{R}\,\phi$$

Como B1=B2, o estado de magnetização, saturação ou não, nas colunas laterais e na coluna central são iguais. Isto é, todo o material do circuito magnético se encontra no mesmo estado de magnetização.

10 - CIRCUITOS MAGNÉTICOS NÃO LINIARES E INDUTÂNCIA

NO LINEAR MAGNETIC CIRCUITS AND INDUCTANCE

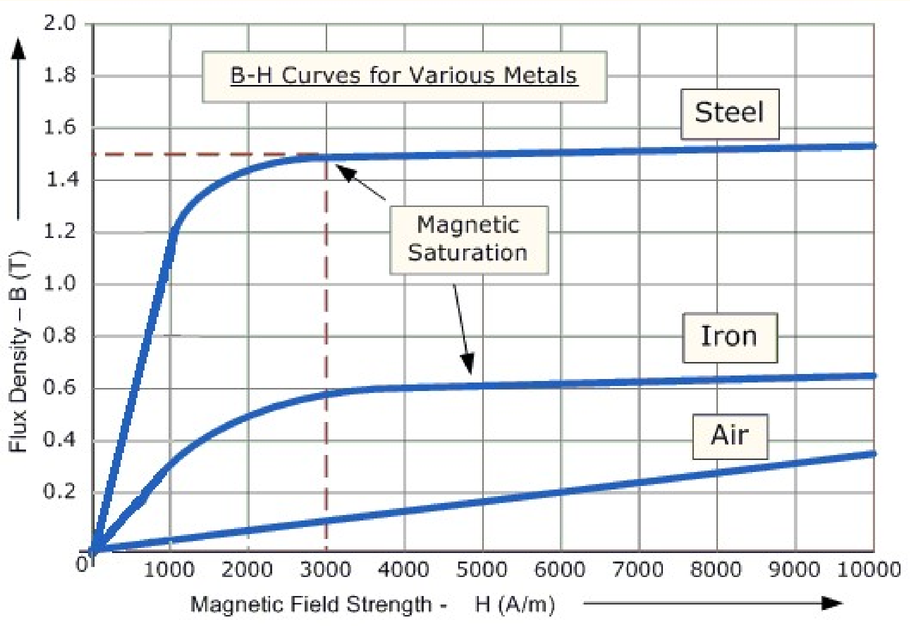
INDUTÂNCIA EM CIRCUITOS MAGNÉTICOS SATURADOS

INDUCTANCE IN SATURATED MAGNETIC CIRCUITS

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

$$L = \frac{N\,BA}{I}$$

$$L = \frac{N\,f(H)\,A}{I}$$



Na zona não linear da curva de magnetização o acréscimo do campo magnético, H, devido ao aumento da força magneto-motriz, FMM, não resulta num proporcional aumento da densidade de fluxo magnético, B. Consequentemente, o proporcional aumento de fluxo magnético, Φ, devido ao inicial aumento de FMM também não ocorre. Desta forma, o denominador da expressão de da indutância, L, aumenta sem que o numerador aumente na mesma proporção o que leva à diminuição de L. Este facto, conjuntamente com a evolução da curva de magnetização, permite afirmar que um circuito magnético quando saturado apresenta tanto menor indutância quanto maior é o seu nível de saturação.

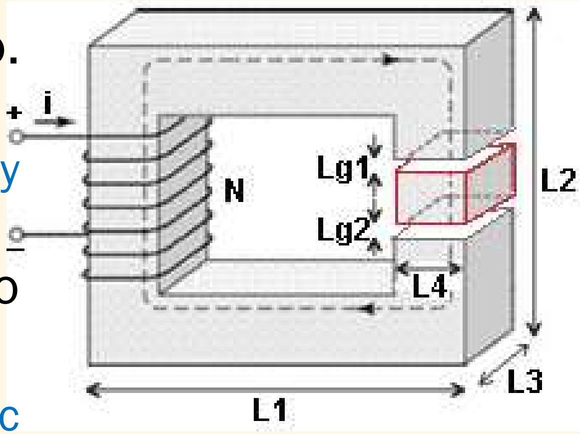
- exercícios....
  exercises....

1) Considere um circuito magnético fechado com secção de ferro de 5 cm2 e comprimento de 30 cm em torno do qual se encontra uma bobina de 200 espiras perfeitamente ajustada e percorrida por uma corrente de 10 A.
   Assume a closed magnetic circuit with iron core. It has section of 5cm^2, length of 30cm and 200 turns perfectly adjusted to the core. The coil current is of 10A.

a) Calcule o fluxo no núcleo e identifique se este se encontra saturado.
   Find the magnetic flux in the core and identify whether it is saturated.

b) Sabendo que foi introduzido um entre-ferro recalcule o fluxo e identifique o estado de saturação do ferro para as seguintes condições:
   Knowing that was introduced an air-gap recalculate de magnetic flux and identify the state of saturation of the iron core for the following conditions:

   1) entre-ferro de 1mm;
      air-gap of 1mm
   2) entre-ferro de 3mm;
      air-gap of 3mm



2) Considere o circuito magnético de aço apresentado ao lado. O enrolamento está perfeitamente ajustada ao núcleo.
Assume the steel magnetic circuit at the right. The coil is perfectly adjusted to the core.

a) Calcule o campo magnético, a densidade de fluxo e o fluxo no interior do enrolamento.
Find the magnetic field, the magnetic flux density and the magnetic flux in the core.

b) Calcule a força nas faces de cada um dos entre-ferros.
Find the force in the faces of the two air-gaps.

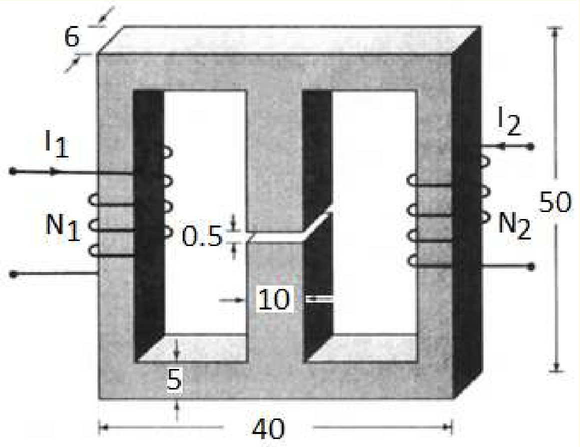
c) Qual é o ponto de funcionamento se os entre-ferros forem substituídos por um único de 3 mm.
What is the magnetic circuit its point of operation if the two air-gaps are replaced by one air-gap of 3 mm.

d) Calcule a indutância aos terminais do enrolamento nas condições dadas.
Find the inductance at the operation conditions.

e) Calcule a indutância aos terminais do enrolamento para corrente nula (funcionamento linear).
Calculate the inductance for null current (linear operation).

L_1 = 20 cm L_2 = 15 cm
L_3 = 4 cm L_4 = 3 cm
L_{g1} = 2 mm L_{g2} = 1 mm

N=500   I=15 A



N1 = 500   I1 = 5 A
N2 = 100   I2 = 25 A

3) Considere o circuito magnético apresentado na figura ao lado. Os enrolamentos estão perfeitamente ajustados ao núcleo de aço.
Assume the magnetic circuit at the right. The coils are perfectly adjusted to the core. The material of the core is steel.

a) Calcule o campo magnético, a densidade de fluxo e o fluxo no aço da coluna central e no entre-ferro.
Find the magnetic field, the magnetic flux density and the magnetic flux in the central column core and in the air-gap.

b) Calcule a força nas faces do entre-ferro.
Find the force in the faces of the air-gap.

b) Qual deverá ser o tamanho do entre-ferro para que o campo magnético passe para metade.
What is the new air-gap to reduce the magnetic field in 50%.

11 – CORRENTES E FEM INDUZIDA

CURRENTS AND INDUCED EMF

- corrente de deslocamento e de condução
  displacement current and induced emf
- relação entre correntes
  relationship between currents
- lei de Faraday
  Farady's law
- movimento em campos variáveis
  movement in variable fields

11 - CORRENTE DE DESLOCAMENTO E FEM INDUZIDA
DISPLACEMENT CURRENT AND INDUCED EMF

CORRENTES DE DESLOCAMENTO E DE CONDUÇÃO
DISPLACEMENT CURRENT AND CONDUCTION CURRENT

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \vec{J}_D$$

Uma carga Q com velocidade U gera um campo eléctrico D variável através de uma superfície S. Quando Q atravessa S surge uma densidade de corrente de condução J_C. Quando D varia através de S surge uma densidade de corrente de deslocamento J_D.

A load with speed U Q generates a variable electric field D through a surface S. When Q through S comes a driving current JC. D where S varies across a current JD displacement arises.

A densidade de corrente de condução é predominante nos bons condutores eléctricos.
The density of conduction current, JC, is predominant in good electrical conductors.

A densidade de corrente de deslocamento é predominante nos bons dieléctricos.
The density of displacement current, JD, is predominant in good dielectrics.

Nos semicondutores coexistem significativamente as densidades de correntes J_C e J_D.
In semiconductors significantly coexist the density of currents JC and JD.

11 - CORRENTE DE DESLOCAMENTO E FEM INDUZIDA

DISPLACEMENT CURRENT AND INDUCED EMF

RELAÇÃO ENTRE CORRENTE DE DESLOCAMENTO E DE CONDUÇÃO
RELATIONSHIP BETWEEN DISPLACEMENT CURRENT AND CONDUCTION CURRENT

$$\begin{cases} \vec{J}_C = \sigma \vec{E} \\ \vec{J}_D = \dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}) \end{cases}$$

para um campo eléctrico sinusoidal, *E sen(wt)*

for a sinusoidal electric field, E sin (wt)

$$\begin{cases} J_C = \sigma E sen(wt) \\ J_D = \varepsilon w E \cos(wt) \end{cases}$$

para os valores RMS vem;

For the RMS values comes;

$$\frac{J_C}{J_D} = \frac{\sigma}{\varepsilon w}$$

LEI DE FARADAY
THE FARADAY'S LAW

Quando um condutor se move num campo magnético ou quando o campo magnético sobre um condutor varia ocorre a indução de uma tensão eléctrica no condutor.

When a conductor moves in a magnetic field or when a magnetic field varies over a conductor an inducing a voltage in the conductor occurs.

$$v = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$v = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

11 - CORRENTE DE DESLOCAMENTO E FEM INDUZIDA
DISPLACEMENT CURRENT AND INDUCED EMF

MOVIMENTO EM CAMPOS VARIÁVEIS
MOVEMENT IN VARIABLE FIELDS

Um circuito fechado em movimento na presença de uma densidade de fluxo magnético variável no tempo é induzido por duas contribuições.
A closed circuit in motion and on the presence of a time variable magnetic flux density is induced by two contributions.

Variação de B
Variation of B

Movimento relativo entre B e dl
Relative motion between B and dl

$$v = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint (\vec{U}\times\vec{B}).d\vec{l}$$

11 - CORRENTE DE DESLOCAMENTO E FEM INDUZIDA
DISPLACEMENT CURRENT AND INDUCED EMF

- exercícios....
- exercises....

11 - CORRENTE DE DESLOCAMENTO E FEM INDUZIDA
DISPLACEMENT CURRENT AND INDUCED EMF

1) Um material tem condutividade 10 S/m e permissividade relativa 2. Sabendo que o campo eléctrico é 20sen(10^5t) (V/m), calcule:
   One material has a conductivity of 10 S/m and relative permittivity 2. Knowing that the electric field is 20 sin(105t) (V/m), calculate:

a) a densidade de corrente de condução, JC;
   the density of the conduction current, JC;
b) a densidade de corrente de deslocamento, JD;
   the density of the displacement current, JD ;
c) a frequência para a qual J_C e J_D teriam o mesmo valor RMS.
   the frequency to which JC, and JD have the same RMS value.

---

2) Um condutor com 3m de comprimento desloca-se paralelamente ao eixo dos xx com velocidade 3m/s segundo o eixo dos yy. Sabendo que o condutor está na presença de um campo magnético com densidade de fluxo 1T segundo o eixo dos zz, determine a tensão eléctrica induzida no condutor.
   A conductor parallel to the x-axis has 3m long and is moving at speed 3m/s according to the y-axis. Knowing that the conductor is in the presence of a magnetic flux density of 1T according to the z-axis, find the voltage induced in the conductor.

3) Um condutor delimita uma área de 0,2m^2 perpendicularmente à qual existe uma densidade de fluxo magnético variável no tempo dado por 200 cos(314t) (mT). Determine:
A conductor delimits an area of 0,2m^2 which is perpendicular to a magnetic flux density with given by 200 cos (314t) (mT). Find:

a) a força electromotriz (fem) induzida no condutor;
the electromotive force (emf) induced in the conductor;

b) a fem caso o condutor formasse 100 espiras colineares;
the emf if the conductor is a 100 turns planar coil;

4) Uma bobina filamentar e planar com 100 espiras quadradas e de lado 20 cm esta centrado em (0,0,0) paralelamente ao eixo dos xx e gira em torno dele com a velocidade de 1000 rot/s. A densidade de fluxo magnético na região é de 5 mT. Determine a expressão da fem induzida na bobina para os seguintes casos de:

A planar square coil with 100 turns and 20cm side is centered in (0,0,0). Rotates at 1000 rot/s around the x-axis and is parallel to it. The magnetic flux density in the region is 5mT. Determine the expression of the coil induced voltage in the following cases:

a) fluxo orientado segundo o eixo dos xx;
flux oriented along the x-axis;

b) fluxo orientado segundo o eixo dos yy;
flux oriented along the y-axis;

c) fluxo orientado segundo o eixo dos zz.
flux oriented along the z-axis.

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES

- Ondas Eletromagnéticas no Vazio
- Ondas na Linha de Transmissão
- Equações das Linhas de Transmissão
- Campo de Propagação e Radiação
- Vetor Poynting

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Forma Diferencial
Differential Form

(lei de Ampère)
(Ampère's law)

$$\nabla \times \vec{\mathrm{H}} = \vec{J_c} + \frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial \mathrm{t}}$$

(lei de Faraday)
(Faraday's law)

$$\nabla \times \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}$$

(lei de Gauss do campo eléctrico)
(Gauss's law for the electric field)

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{D}} = 0$$

(lei de Gauss campo magnético)
(Gauss's law for the magnetic field)

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$$

Na ausência de carga, tem-se:

$$\rho = 0$$

É de salientar que a lei de Gauss aplicada ao campo elétrico pode ser apresentada em função de D ou de E e quando aplicada ao campo magnético pode ser apresentada em função de B ou de H, pois:

$$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathrm{E}} = \varepsilon \vec{\mathrm{E}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Assim sendo, as equações de Maxwell surgem as apresentadas ao lado.

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Equações de Onda

(lei de Ampère)
(Ampère's law)

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \qquad \text{(a)}$$

(lei de Faraday)
(Faraday's law)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \qquad \text{(b)}$$

(lei de Gauss do campo eléctrico)
(Gauss's law for the electric field)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \text{(c)}$$

(lei de Gauss campo magnético)
(Gauss's law for the magnetic field)

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \text{(d)}$$

Para um meio isotrópico e linear tem-se:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{J_c} = \sigma\vec{E}$$

e na ausência de carga:

$$\rho = 0$$

Nestas condições e para dependência temporal de E e H da forma:

$$e^{j\omega t}$$

as equações de Maxwell apresentadas anteriormente surgem como as apresentadas ao lado.

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\mathrm{A}}\right) \equiv \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}}\right) - \nabla^2\vec{\mathrm{A}}$$

$$\nabla^2\vec{\mathrm{A}} = \nabla^2 A_x u_x + \nabla^2 A_y u_y + \nabla^2 A_z u_z$$

Calculando o rotacional de (c) e de (d) e recorrendo de (a) e (b) tem-se:

$$-\nabla^2\vec{\mathrm{H}} = (\sigma + j\omega\epsilon)(\nabla \times \vec{E})$$

$$-\nabla^2\vec{\mathrm{E}} = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H})$$

Substituindo os rotacionais de E e de H das equações (a) e (b) tem-se:

$$\nabla^2\vec{\mathrm{H}} = \gamma^2\vec{\mathrm{H}} \quad \text{e} \quad \nabla^2\vec{\mathrm{E}} = \gamma^2\vec{\mathrm{E}}$$

em que: $\gamma = \alpha + j\beta$

Os divergentes de $\vec{E}$ e de $\vec{H}$ são nulos nas condições presentes, ver equações (c) e (d) anteriores, pelo que $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\mathrm{A}}\right) = -\nabla^2\vec{\mathrm{A}}$.

Soluções para estado estacionário sinusoidal em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\vec{\mathrm{H}} = \gamma^2\vec{\mathrm{H}}$$

$$\frac{d^2\vec{H}}{dz^2} = \gamma^2\vec{H}$$

em notação complexa

$$\vec{H}(\text{z,t}) = H_0\, e^{\pm\gamma z + j\omega t}\, \vec{u}_H$$

$$\nabla^2\vec{\mathrm{E}} = \gamma^2\vec{\mathrm{E}}$$

$$\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} = \gamma^2\vec{E}$$

em notação complexa

$$\vec{E}(\text{z,t}) = E_0\, e^{\pm\gamma z + j\omega t}\, \vec{u}_E$$

verificando

$$\frac{d\vec{E}(\text{z,t})}{dz} = \pm\gamma E_0\, e^{\pm\gamma z + j\omega t}\, \vec{u}_E$$

$$\frac{d^2\vec{E}(\text{z,t})}{dz^2} = \gamma^2 E_0\, e^{\pm\gamma z + j\omega t}\, \vec{u}_E = \gamma^2\vec{E}(\text{z,t})$$

em que: $\gamma = \alpha + j\beta$

Para o caso do campo magnético a verificação é semelhante.

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Componentes real e imaginaria
da constante de propagação γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)}$$

constante de
atenuação

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}$$

constante de
deslocamento de fase

- **Ondas Eletromagnéticas**

Soluções para estado estacionário sinusoidal em coordenadas cartesianas para $\vec{u}_E = \vec{u}_x$

$$\vec{E} = E_0\ e^{\pm\gamma z + j\omega t}\ \vec{u}_x$$

Pela lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{\mathrm{E}} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \left(E_0\ e^{\pm\gamma z + j\omega}\ \ \vec{u}_x\right)}{-j\omega\mu}$$

$$\vec{H} = \frac{\pm\gamma\left(E_0\ e^{\pm\gamma z + j\omega}\ \ \vec{u}_y\right)}{-j\omega\mu}$$

$$E = E_0 e^{\pm\gamma z + j\omega t}$$

$$H = \frac{\pm\gamma\left(E_0\ e^{\pm\gamma z + j\omega t}\right)}{-j\omega\mu}$$

$$\frac{E}{H} = \frac{-j\omega\mu}{\pm\gamma} = \eta$$

$$\eta = \frac{-j\omega\mu}{\pm\gamma}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\eta = \pm\frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta}$$

η é a impedância característica do meio

É de salientar que do cálculo do rotacional sobre $\vec{E}$ surge $\vec{H}$ perpendicular a $\vec{E}$.

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

$$\eta = \pm \frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right)}$$

$$|\eta| = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$$

η é a impedância característica do meio

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Para qualquer meio isotrópico e linear tem-se que σ, μ e ε são constantes.

Para semicondutores, condutividade intermedia, tem-se: $\sigma \neq 0$ e $\omega\varepsilon/\sigma \neq 0$

Para bons isolantes, condutividade muito pequena, tem-se: $\sigma \rightarrow \text{zero}$

Para bons condutores, condutividade muito elevada, tem-se: $\omega\varepsilon/\sigma \rightarrow \text{zero}$

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Para o caso particular de condutividade nula tem-se:

$$\sigma \to \text{zero}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)} \longrightarrow \alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)} \longrightarrow \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} \longrightarrow |\eta| = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

É de salientar que $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ tem a dimensão de velocidade, tomando o valor da velocidade da luz para o caso do meio.

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

Para o caso particular de condutividade muito elevada tem-se:

$$\sigma \gg \omega\varepsilon$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)} \longrightarrow \alpha = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)} \longrightarrow \beta = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$$

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} \longrightarrow |\eta| = \sqrt{\mu\frac{\omega}{\sigma}}$$

É de salientar que $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ tem a dimensão de velocidade, tomando o valor da velocidade da luz para o caso do meio.

- **Vetor Poynting**

Para os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ expressos na forma real o vetor Poyting é dado por:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

No caso de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ estarem expressos na forma complexa com dependência temporal $e^{j\omega t}$ tem-se:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$$

Como as equações acima são referentes a valores de pico de campos sinusoidais a potencia média vem:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} R_e\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{1}{2} R_e\left(\vec{S}\right)$$

O vetor $\vec{P}$ é sempre perpendicular a $\vec{E}$ e a $\vec{H}$ tal como $\vec{S}$ e $\vec{P}_m$.

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS
ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

- exercícios….
- exercises….

12 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

ELECTROMAGNETIC WAVES IN MATTER

1) Considere um campo elétrico no vazio dado por:

$$\vec{E} = 100\ \sin(5000\pi t - \beta z)\,\vec{a}_y \quad \text{em V/m}$$

Determine:

a) a impedância característica do meio em que a onda se propaga;

b) a constante de atenuação;

c) a constante de deslocamento de fase;

d) a constante de propagação;

e) a velocidade de propagação da onda;

f) o comprimento de onda da onda;

g) o vetor campo magnético;

h) o Vetor Poynting e

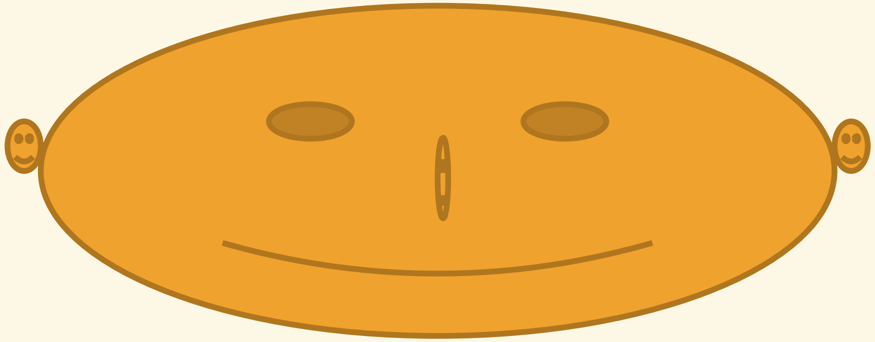
i) a potência média incidente.

2) Considere o problema ao lado mas agora para um meio com:

- condutividade elétrica 62,5 $\mathrm{S.m/mm^2}$,
- permeabilidade magnética relativa 10 e
- permissividade dialética relativa 5.

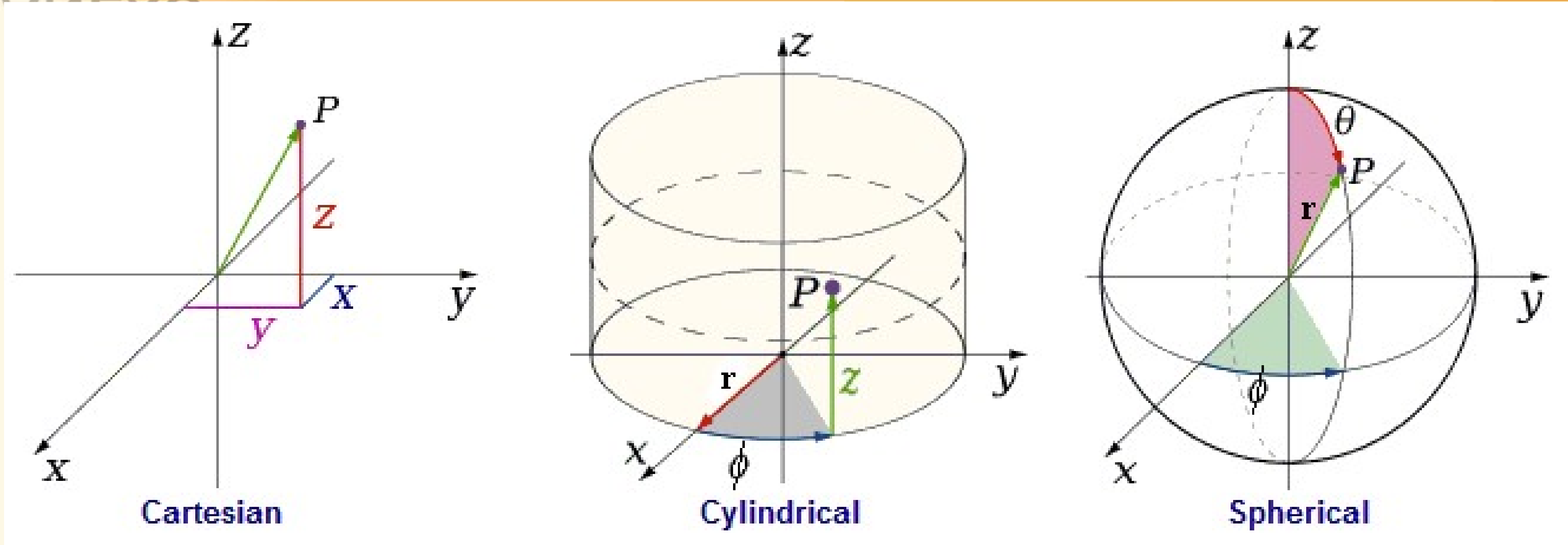
3) Considere o problema ao lado mas agora para um meio com:

- condutividade elétrica 0.07 $\mathrm{S.m/mm^2}$,
- permeabilidade magnética relativa 10 e
- permissividade dialética relativa 5.



- FIM
  END

ANEXO



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$dv = dx\ dy\ dz$$
$$ds_{xy} = dxdy$$
$$ds_{xz} = dxdz$$
$$ds_{zy} = dzdy$$

$$(x,y,z) \equiv x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$
$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$
$$dv = r\ dr\ d\phi\ dz$$
$$ds_{rz} = drdz$$
$$ds_{r\phi} = rdrd\phi$$
$$ds_{z\phi} = rdzd\phi$$

$$(r,\phi,z) \equiv r\vec{a}_r + \phi\vec{a}_\phi + z\vec{a}_z$$
$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_z$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\ d\phi^2$$
$$dv = r^2 \sin(\theta)\ dr\ d\theta\ d\phi$$
$$ds_{\phi\theta} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$
$$ds_{\phi r} = r \sin(\theta) drd\phi$$
$$ds_{\theta r} = rd\theta dr$$

$$(r,\theta,\phi) \equiv r\vec{a}_r + \theta\vec{a}_\theta + \phi\vec{a}_\phi$$
$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\phi$$

Cartesianas

$$div(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z$$

$$lap(A) = \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$grad(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{a}_z$$

Cilíndricas

$$div(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{a}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\vec{a}_z$$

$$lap(A) = \nabla^2 A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$grad(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \phi}\vec{a}_\phi + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{a}_z$$

Esféricas

$$div(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \mathrm{sen}\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\vec{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{a}_\phi$$

$$lap(A) = \nabla^2 A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2}$$

$$grad(A) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{\partial A}{r\,\mathrm{sen}\theta\,\partial \phi}\vec{a}_\phi$$

1) O operador laplaciano, lap(.), também é aplicável a campos vetoriais. Ver página 57.

Constantes eletromagnéticas

Quantidade	Símbolo	Valor
Permeabilidade magnética no vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N·A^{-2} = 1,256 637 061 × 10^{-6} N·A^{-2}
Permissividade no vácuo	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	8,854 187 817 × 10^{-12} F·m^{-1}
Impedância característica do vácuo	$Z_0 = \mu_0 c$	376,730 313 461 Ω
Constante de Coulomb	$\kappa = 1/4\pi\epsilon_0$	8,987 551 787 4 × 10^{9} N·m²·C^{-2}
Carga elementar	e	1,602 176 487 × 10^{-19} C
Magneton de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	927,400 915 × 10^{-26} J·T^{-1}

permissividade (Brasil) = permitividade (Portugal)

$1\,\mathrm{T} = \mathrm{Wb/m^2} = 10^4\,\mathrm{G}$

Α α	alpha	Ν ν	nu
Β β	beta	Ξ ξ	ksi
Γ γ	gamma	Ο ο	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
Ε ε	epsilon	Ρ ρ	rho
Ζ ζ	zeta	Σ σς	sigma
Η η	eta	Τ τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	upsilon
Ι ι	iota	Φ φ	phi
Κ κ	kappa	Χ χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
Μ μ	mu	Ω ω	omega

E – campo eléctrico electric field (V/m)
D – densidade de fluxo eléctrico density of electric flux (C/m^2)
Ψ_E – fluxo eléctrico electrical flux (V.m)

H – campo magnético magnetic field (A/m)
B – densidade de fluxo magnético magnetic flux density or magnetic induction (T)
ϕ – fluxo magnético magnetic flux (Wb)

ρ – densidade de carga eléctrica density of electric charge (C/m; C/m^2 C/m^3)
J – densidade de corrente de condução conduction current density (A/m^2)

ANALOGIA - CIRCUITOS MAGNETICOS E ELECTRICOS

ANALOGY - MAGNETIC CIRCUITS AND ELECTRICAL CIRCUITS

Magnetic			Electric		
Name	**Symbol**	**Units**	**Name**	**Symbol**	**Units**
Magnetomotive force (MMF)	$\mathcal{F} = \int \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$	ampere-turn	Electromotive force (EMF)	$\mathcal{E} = \int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$	volt
Magnetic field	***H***	ampere/meter	Electric field	***E***	volt/meter = newton/coulomb
Magnetic flux	ϕ	weber	Electric current	*I*	ampere
Hopkinson's law or Rowland's law	$\mathcal{F} = \phi \mathcal{R}_m$	ampere-turn	Ohm's law	$\mathcal{E} = IR$	
Reluctance	$\mathcal{R}_m$	1/henry	Electrical resistance	*R*	ohm
Permeance	$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}_m}$	henry	Electric conductance	*G* = 1/*R*	1/ohm = mho = siemen
Relation between ***B*** and ***H***	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$		Microscopic Ohm's law	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	
Magnetic flux density ***B***	***B***	tesla	Current density	***J***	ampere/square meter
Permeability	*μ*	henry/meter	Electrical conductivity	*σ*	siemen/meter

CURVA DE MAGNETIZAÇÃO